

# مبادئ الطرق الاحصائية

الدكتور حلال الصياد      الدكتور عبد الحميد محمد ربيع

الطبعة الأولى  
١٤٠٤ هـ ~ ١٩٨٣ م  
جدة - المملكة العربية السعودية



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



الناشر

# تَهَامَة

جدة - المملكة العربية السعودية  
ص.ب. ٥٤٥٥ - هاتف ٦٤٤٤٤٤٤

جميع الحقوق لهذه الطبعة محفوظة للناشر







بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

«صدق الله العظيم»

(سورة الجن)



## مقدمة

هذا هو الكتاب الثاني لطلاب الدراسات الاقتصادية والادارية يتناول مبادئ طرق تحليل البيانات أو ما يسمى بالطرق الإحصائية والاستدلال الإحصائي. ويحتوي على مبادئ نظرية الاحتمالات معروضة بطريقة بسيطة لا تحتاج إلى رياضيات متقدمة. كما يحتوي الكتاب على التوزيعات الاحتمالية ومبادئ العينات وتحليل بيانات العينات الكبيرة والصغيرة مستخدمين فترات الثقة واختبارات الفروض بعرض بسيط.

وقد عملنا على عدم التعرض للمفاهيم الدقيقة للنظريات الإحصائية والتي تحتاج إلى قدر كبير من التحليل الرياضي. كما حرصنا على عرض الموضوعات بطريقة مبسطة تعتمد على إيضاح الطريقة دون التعرض للنظرية مع تقديم عدد كبير من الأمثلة العملية مما يساعد على سهولة فهم واستخدام هذه الموضوعات في الحياة العملية.

ونود أن نقدم الشكر الجزيل إلى عدد كبير من الإخوة الزملاء الذين ساهموا بتزويد المكتبة العربية بعدد غير قليل من الكتب الإحصائية التي استفدنا منها كثيرا.

والله وليّ التوفيق،،

المؤلفان



## الباب الأول

### مبادئ الاحتمالات



# مبادئ الاحتمالات

(١-١) — مقدمة :

تلعب الاحتمالات دورا خاصا في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم لأنها تستخدم في قياس عدم التأكد، فكثيرا ما نقابل بعملية اتخاذ قرارات بناء على معلومات ناقصة ونعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار. فمثلا قد نلغي رحلة خارجية رتبنا لها من مدة وذلك لأن احتمال أن يكون الجو لدينا احتمال كبير، وكذلك كثيرا ما يهمل الطالب في نهاية العام جزءا من المقرر لأن احتمال أن يأتي في الامتحان احتمال صغير.

وكثيرا ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة في اليوم التالي واحتمال فوز فريق كرة قدم معين على فريق آخر. وأحيانا نجد أننا نعبر عن هذه الاحتمالات بتقدير عددي. كأن نقول أن احتمال سقوط أمطار غدا ٢٠٪ واحتمال وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن ٩٥٪ وهكذا.

وهذه التقديرات العديدة للاحتتمالات لا تستند إلى أساس رياضي لكن قد تعتمد على خبرات ومعلومات سابقة عن الطقس وعن تتبع لفترات طويلة وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن.

وقد يتبادر إلى الذهن الآن أن نبدأ بتعريف الاحتمال، ما هو، وما هي الموضوعات التي تتعلق بنظرية الاحتمالات. ولكن في الواقع ليس من السهل أن نبدأ بوضع تعريف محدد للفظ «احتمال» ولكن إذا رغبتنا في ذلك فيمكننا تحديد مجال نظرية الاحتمالات بالتعريف التالي:

«نظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضة التطبيقية يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء». لهذا لابد لنا من إيضاح كلمة «صدفة — Chance» — هذه الكلمة التي تعودنا على سماعها في حياتنا اليومية ويمكن توضيح مفهومها على النحو التالي:

من المعلوم لدينا أننا إذا ألقينا قطعة من المعدن في الهواء فإنها سوف تسقط على الأرض وهذا شيء «مؤكد» لأنها حقيقة معروفة — ولكن إذا ألقينا قطعة من العملة على طاولة مسطحة فإن القطعة سوف تسقط على سطح الطاولة وسيكون أحد وجهيها إلى أعلى (مع استبعاد أن تستقر قطعة العملة على حرفها) — ولكننا لا نعلم أي الوجهين سيظهر إلى أعلى لأن هذا يعتمد على ما نسميه «بالصدفة».

كذلك نعرف أن الماء يتحول إلى بخار إذا سخن على النار إلى درجة حرارة ١٠٠ درجة مئوية في ظروف الضغط الجوي العادي — وهذا شيء مؤكد — ولكن عند إلقاء زهرة الطاولة على لوحة مسطحة فإن ما نعرفه هو أن أحد أوجهها الستة سيظهر إلى أعلى ولكن أي وجه من الأوجه الستة سيظهر هذا ما لا نعرفه لأن ذلك يعتمد على ما نسميه «بالصدفة» وهكذا ..

مما سبق يمكننا استنباط الفرق بين لفظ «مؤكد» ولفظ «صدفة» — فالشيء المؤكد يعتمد على عدة ظروف معينة معروفة لدينا تماما إذا تحققت هذه الظروف حدث هذا الشيء ، فكما سبق أن قلنا إنه في ظروف الضغط الجوي العادي إذا تم تسخين الماء إلى ١٠٠ درجة مئوية فإنه يتحول إلى بخار — وفي هذه الحالة الظروف معروفة لنا تماما لهذا نقول إن تحول الماء إلى بخار إذا تحققت هذه الظروف يعتبر شيئا مؤكدا. ولكن في حالة قطعة العملة أو زهرة الطاولة فإن الوجه العلوي الذي يظهر بعد الإلقاء يعتمد على ظروف كثيرة بعضها معروف لنا وبعضها نجهله تماما — فظهور وجه معين يعتمد على طريقة الإلقاء وقوته ونقطة الاصطدام الأولى بالطاولة وغير ذلك من الحقائق التي نجهلها تماما والتي تسبب في ظهور ذلك الوجه دون الآخر. من هذه الأمثلة يمكن أن نفرق بين لفظي «مؤكد» و«صدفة» فالأول يدل على شيء معلوم لدينا كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه أما الثاني فأنما يدل على شيء غير معلوم لدينا تماما كل ما يؤدي إلى حدوثه من ظروف.

#### (٢-١) — مفهوم الاحتمال :

إن لفظ صدفة الذي عرفناه في البند السابق وثيق الصلة بلفظ احتمال «Probability» وكلمة «احتمال» هي كلمة شائعة في لغتنا اليومية ودائما نستعملها عندما نتكلم عن شيء يتحكم في حدوثه عوامل الصدفة. فمثلا عندما نقول «يحتمل أن تمطر السماء اليوم» نقول هذه العبارة إذا كانت السماء مليدة بالغيوم وكان الجو مائلا إلى البرودة لأن هذه «بعض الظروف» التي تؤدي إلى سقوط المطر وليست بالطبع هي كل الظروف وإلا لكان من المؤكد سقوط المطر ولكن يوجد بها بالإضافة إلى هذه الظروف عدة ظروف أخرى لا نعرفها تماما إذا توفرت كلها سقط المطر أما إذا لم تتوافر كلها فلن تسقط أمطار.

كذلك يمكن النظر إلى الاحتمالات على أنها أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية. وتسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة أي لا نستطيع التنبؤ بها.

فمثلا ، إذا ألقيت قطعة معدنية من النقود فإننا لا نستطيع أن نتنبأ إذا كان السطح العلوي لها سيظهر صورة أو كتابة ، إذا فهذه محاولة أو تجربة عشوائية. كذلك عند سحب ورقة عشوائية من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) فإننا لا نعلم إذا كانت الورقة المسحوبة ستظهر صورة أو عددا ، إذا فهي محاولة عشوائية. كذلك إذا كانت هناك حالة ولادة فلا نستطيع التنبؤ عما إذا كان المولود ذكرا أو أنثى. إذا فهذه تجربة عشوائية.



وعلى العموم فإن نتائج التجارب تنقسم إلى ثلاثة أنواع من وجهة نظر الاحتمالات هي كما يلي :

### ( أ ) نتائج أو حوادث مؤكدة :

وهي نتائج لا بد من وقوعها أو حدوثها .

**مثال (١) :** إذا ألقيت تفاحة في الهواء فإننا نعلم أنها لا بد وأن تسقط على الأرض . هنا التجربة هي إلقاء التفاحة في الهواء ، والنتيجة هي سقوط التفاحة على الأرض .

**مثال (٢) :** إذا كان لدينا صندوق به ٨ كرات بيضاء اللون ، سحبت منه كرة واحدة فلا بد أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

هنا التجربة هي سحب كرة من الصندوق ، والنتيجة أن الكرة بيضاء : إذا فهذه نتيجة مؤكدة .

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإنه يقال إن احتمال وقوعها يساوي واحد .

أي أن احتمال سقوط التفاحة (في المثال ١) = ١

وكذلك احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء في (المثال ٢) = ١

### (ب) نتائج أو حوادث مستحيلة :

وهي تلك النتائج أو الحوادث المستحيل وقوعها .

**مثال (٣) :** هل يمكن سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء ؟

التجربة هنا هي سحب كرة من الصندوق ، والنتيجة المطلوبة أن تكون الكرة حمراء ، إذاً فهذه حادثة مستحيلة .

**مثال (٤) :** أن يعيش شخص ما إلى الأبد . هذه حادثة مستحيلة . وإذا كانت الحادثة مستحيلة الوقوع فإنه يقال أن احتمال وقوعها يساوي صفر .

أي أن احتمال سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء (في المثال ٣) = صفر .

وكذلك احتمال أن يعيش شخص ما إلى الأبد (في المثال ٤) = صفر .

### (ج) حوادث أو نتائج غير مؤكدة (محتملة أو ممكنة) :

وهي نتائج التجارب العشوائية التي ذكرناها سابقا والتي لا نستطيع أن نتنبأ بوقوعها ، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها .

ولفظ احتمال يعبر عن مدى توقعنا لحدوث شيء معين وهذا التوقع أو التنبؤ أو التخمين قد يكون كبيرا وقد يكون صغيرا وتبعاً لذلك قد يكون الاحتمال كبيراً وقد يكون صغيراً، وهذا يبعث لدينا الرغبة في إجراء المقارنة بين احتمالي حدوث حادثتين لمعرفة أيهما أكبر احتمالاً وذلك كما يتضح مما يلي :

لو كان لدينا صندوقان بهما كرات متشابهة في الحجم والوزن وكل شيء ما عدا اللون، وكان الصندوق الأول به ٩٠ كرة بيضاء و١٠ كرات سوداء والصندوق الثاني به ١٠ كرات بيضاء و٩٠ كرة سوداء ونريد الإجابة عن السؤال التالي : عند سحب كرة واحدة عشوائياً من كل صندوق أيهما أكثر احتمالاً، الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أم الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني ؟

بالتفكير العقلي البسيط يمكننا الحكم بأن احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أكبر من احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني وذلك لكبر نسبة الكرات البيضاء في الصندوق الأول عنها في الثاني .

هذا يوضح أن كل ما نعرفه حتى الآن هو مجرد مقارنة الاحتمالات ولكن لم نحدد قيمة الاحتمال بطريقة عددية، هذا مما دفع العلماء الأوائل في هذا المجال إلى وضع تعريف نتمكن به من قياس الاحتمال بتحديد قيمته العددية .

### (١-٣) — فكرة سريعة عن نشأة نظرية الاحتمالات :

لقد ظهرت نظرية الاحتمالات في القرن السابع عشر ونالت اهتمام الكثير من علماء الرياضيات أمثال «بسكال — Pascal» (١٦٢٣ — ١٦٦٢) و«فرمات — Fermat» (١٦٠١ — ١٦٦٥) حيث دخل هذان العالمان الكبيران في عملية مناظرة عظيمة أثرت هذا الفرع من العلوم ودخلت به في مجال الدراسة العلمية المنظمة وذلك عندما تقدم أحد نبلاء فرنسا ويدعى «تشيڤلييه — de Méré» وكان يعمل في مجال المضاربة والمقامرة وطلب من بسكال أن يحسب له احتمال بعض الحالات التي تواجهه في أعماله فقام بسكال بحساب الاحتمالات المطلوبة ثم تعدى ذلك إلى عدة حالات أخرى ثم اهتم بهذه الحالات وغيرها كنوع من الدراسة وقام بوضع أسس وقواعد تخدم هذه الدراسة .

وقد أكمل «برنولي — Bernoulli» (١٦٤٥ — ١٧٠٥) المسيرة وبعده «لابلاس — Laplace» (١٧٤٩ — ١٨٢٧) — ونتج عن أعمال «برنولي» وضع تعريف للاحتمال وإن كانت صياغة هذا التعريف قد أتت على يد «لابلاس» — وقبل تقديم هذا التعريف سنعرض بعض القواعد والأسس والتعريفات التي تعتبر نتاجاً لما قام به هؤلاء الرواد الأوائل من دراسات علمية منتظمة في مجال الاحتمالات .

## (أ) الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases) :

هى تلك الحالات التى يكون لها فرص متكافئة من حيث الحدوث — أى لها نفس الفرصة .

فمثلا لو كان لدينا صندوق به ١٠٠ كرة متشابهة فى كل شىء عدا اللون منها ٥٠ كرة بيضاء ، ٥٠ كرة سوداء — ورجبنا فى سحب كرة من هذا الصندوق عشوائيا سنجد أن فرصة ظهور اللون الأبيض تعادل تماما فرصة ظهور اللون الأسود وذلك بسبب تساوى أعداد الكرات من كل من اللونين و يعتبر اللونان فى هذه الحالة حالتين متماثلتين . كذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية متزنة ومصنوعة من معدن متجانس وكانت عملية الإلقاء غير متحيزة فإن فرصة ظهور الصورة تعادل تماما فرصة ظهور الكتابة و بهذا يمكن القول أن هاتين الحالتين ( الصورة والكتابة ) متماثلتين .

## (ب) الحوادث الشاملة (Exhaustive Events) :

يقال أن الحوادث ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ... ، أن تشكل مجموعة من الحوادث الشاملة فى تجربة معينة إذا كان لابد أن يتحقق واحد منها على الأقل عند إجراء التجربة ولا توجد نتيجة أخرى للتجربة تختلف عن هذه الحوادث .

مثال ذلك عند إلقاء زهرة الطاولة فإن الوجه الستة للزهرة ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ) تعتبر أحداثا شاملة — كذلك عند إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهات ( صورة ، كتابة ) حدثين شاملين .

## (ج) الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events) :

يقال إن الحوادث ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ... ، أن حوادث متنافية إذا استحال جدوى أى اثنين (أو أكثر) منها فى آن واحد .

فمثلا فى تجربة إلقاء زهرة الطاولة تعتبر الوجه الستة حوادث متنافية لعدم إمكان حدوث أى اثنين منها فى آن واحد وكذلك فى تجربة إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهان ( صورة ، كتابة ) حدثين متنافيين .

## ملحوظة (١) :

من التعريف السابق فى (أ) للحوادث المؤكدة وكذلك الحوادث المستحيلة فى (ب) يبدو واضحا لنا معنى كلمة « حدث » وكذلك كلمة « تجربة » — مما يجعلنا لا نحتاج لوضع تعريف مستقل لكل منهما .

## الحالات الممكنة (Possible Cases) :

هى مجموعة النتائج (أو الحالات) التي يمكن أن تنتج عند إجراء التجربة.

فلو كانت التجربة هى إلقاء زهرة الطاولة مرة واحدة فإن الأوجه الستة للزهرة تعتبر هى الحالات الممكنة لهذه التجربة. كذلك إذا كانت التجربة هى سحب كرة واحدة من كيس يحتوي على عشرة كرات متماثلة فإن الحالات الممكنة تعتبر عشرة حالات متماثلة. وهكذا.

## (هـ) الحالات المواتية (Favorable Cases) :

هى مجموعة النجاة التي تؤدي إلى تحقيق الحدث — وهى جزء من الحالات الممكنة للتجربة.

## (١-٤) — تعريف الاحتمالات :

يوجد للاحتمالات عدة تعاريف مختلفة نذكر منها تعريفين اثنين فقط واللذين لا يحتاجان إلى مفهوم رياضي متقدم هما :

أولاً : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات.

ثانياً : التعريف التجريبي للاحتمالات.

أولاً : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات :

إذا كنا بصدد إجراء تجربة ما مجموعة النتائج التي يمكن أن تنتج عنها عددها  $n$  من الحالات الشاملة المتنافية المتماثلة وكان  $m$  من هذه الحالات موات للحدث  $A$  فإن احتمال وقوع الحدث  $A$  يعرف بأنه النسبة  $\frac{m}{n}$ .

فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحدث  $A$  بالرمز  $P(A)$  فيمكن كتابة هذا الاحتمال في الصورة التالية :

ح (أ) = عدد الحالات المواتية للحدث  $A$  / عدد الحالات الممكنة للتجربة .

فمثلاً عند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) نجد أن لدينا ٥٢ حالة متنافية ومتماثلة هى الحالات الممكنة للتجربة، فإذا كان الحدث  $A$  هو الحصول على صورة يكون أمامنا ١٢ حالة مواتية لوقوع الحدث  $A$  وهى عدد الصور في الكوتشينة وعلى هذا يكون احتمال وقوع الحدث  $A$  مساوياً  $\frac{12}{52}$ ، وتكتب في صورة رمزية كما يلي :

$$ح (أ) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} .$$

كذلك إذا كانت التجربة هى إلقاء زهرة نرد متزنة تكون الحالات الممكنة لهذه التجربة ٦ حالات شاملة ومتنافية ومتماثلة. فإذا كان الحدث  $A$  هو الحصول على عدد زوجي من النقاط فإن

الحالات المواتية لهذا الحدث هي ٣ حالات (٢ - ٤ - ٦) وهي الأوجه التي تحمل عددا زوجيا من النقط وبهذا يكون احتمال وقوع هذا الحدث مساويا  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  وتكتب: ح (أ)  $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  وهكذا.

مثال (٥) : عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة - ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لها أكثر من ٤ ؟

التجربة : هي إلقاء زهرة النرد .

∴ الحالات الممكنة هي : ن = ٦ حالات متماثلة .

الحدث أ هو : أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي للزهرة أكبر من ٤ .

∴ الحالات المواتية هي : م = ٢ (وهي الحالتين ٥ ، ٦) .

∴ ح (أ)  $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  .

مثال (٦) : عند إلقاء قطعتي عملة مرة واحدة (أو إلقاء قطعة واحدة مرتين متتاليتين) ما هو احتمال الحصول على صورتين ؟

### الحل

التجربة هي : إلقاء قطعتي عملة .

الحالات الممكنة هي : - ن =  $2 \times 2 = 4$  حالات

وذلك لأن القطعة الأولى لها وجهان كل وجه منهما يمكن أن يناظره وجهان للقطعة الثانية . وهذه الحالات الأربع يمكن حصرها لورمزنا للصورة بالرمز ص والكتابة بالرمز ك كما يلي :

ص ص - ص ك - ك ص - ك ك .

الحدث أ هو : الحصول على صورتين .

∴ الحالات المواتية هي : حالة واحدة وهي (ص ص) .

∴ ح (أ)  $= \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{1}{4}$

مثال (٧) : عند إلقاء زهرتين متزنتين من زهرات النرد مرة واحدة (أو إلقاء زهرة واحدة مرتين) ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين :

٩ : فأكثر ؟      ٩ : مساويا

### الحل

التجربة : إلقاء زهرتي نرد متزنتين .

ن = ٣٦ حالة متماثلة (٦ حالات للزهرة الأولى كل حالة منها يقابلها ٦ حالات للزهرة الثانية

وبذا يكون عدد الحالات الممكنة مساويا  $6 \times 6 = 36$  حالة) .

ويمكن حصر الحالات الممكنة في الشكل التالي :

نرمز للزهرة الأولى بالرمز س والثانية بالرمز ص

ص \ س	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(٢،١)	(٣،١)	(٤،١)	(٥،١)	(٦،١)
٢	(١،٢)	(٢،٢)	(٣،٢)	(٤،٢)	(٥،٢)	(٦،٢)
٣	(١،٣)	(٢،٣)	(٣،٣)	(٤،٣)	(٥،٣)	(٦،٣)
٤	(١،٤)	(٢،٤)	(٣،٤)	(٤،٤)	(٥،٤)	(٦،٤)
٥	(١،٥)	(٢،٥)	(٣،٥)	(٤،٥)	(٥،٥)	(٦،٥)
٦	(١،٦)	(٢،٦)	(٣،٦)	(٤،٦)	(٥،٦)	(٦،٦)

الحالات السابقة تمثل ٣٦ نتيجة — فمثلا النتيجة (٢، ٥) معناها أن الزهرة الأولى نتيجتها الوجه الذي عليه ٥ فقط والزهرة الثانية الوجه الذي عليه نقطتين .

: الحدث أ : هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ .

∴ الحالات المواتية م : هي تلك الحالات التي تبدو بين الخطين المائلين في الجدول السابق وعددها ٤ حالات .

$$\text{أي أن } م = ٤$$

$$\therefore \text{ح (أ)} = \frac{١}{٣٦} = \frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$$

: الحدث ب : هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ فأكثر .

الحالات المواتية م : هي تلك الحالات الموجودة بين الخطين المائلين في الجدول السابق بالإضافة إلى كل الحالات الموجودة أسفل هذين الخطين لأن كلها تحقق الحدث المطلوب أم أي أن مجموع كل منها إما ٩ أو أكثر من ٩ وعددها ١٠ حالات متماثلة — أي أن :

$$١٠ = م$$

$$\therefore \text{ح (ب)} = \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٥}{١٨}$$

(١-٤-١) المبادئ الأولية للاحتمالات

مما سبق نستنتج ما يلي :

$$(11) \text{ صفر} \geq \text{ح (أ)} \geq 1$$

$$(11) \text{ ح (أ)} = \text{صفر إذا كانت أ حادثة مستحيلة}$$

$$(111) \text{ ح (أ)} = 1 \text{ إذا كانت أ حادثة مؤكدة.}$$

$$(17) \text{ إذا كان احتمال وقوع الحادثة أهو ح وكان احتمال عدم وقوعها هول فإن}$$

$$\text{ح} + \text{ل} = 1$$

أي أن احتمال وقوع أي حادثة + احتمال عدم وقوعها = 1  
وذلك لأنه من المؤكد أن تقع الحادثة أو لا تقع.

### (1-4-2) - بعض قوانين الاختيار الهامة :

لا يمكن حل مسائل الاحتمالات فإننا سنعتمد على بعض قوانين موضوع الاختيار ونذكر منها على الأخص :

(أ) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار س من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء

$$= \text{ن ق س} = \frac{ن!}{س! (ن - س)!}$$

حيث أن :

$$ن! = ن (ن - 1) (ن - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$\text{فمثلا : } 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

مثال (8) : إذا كان لدينا 4 رجال وأريد إرسال بعثة منهم مكونة من رجلين . فإنه يمكن اختيار أعضاء هذه البعثة بعدد من الطرق مساويا 4 ق 2 طريقة .

$$\text{حيث } 4 \text{ ق } 2 = \frac{4!}{2! (4 - 2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

$$6 \text{ طرق} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 1 \times 2} =$$

مثال (9) : صندوق به 8 كرات متماثلة . سحبته منه 3 كرات ، فما هي عدد الطرق التي يمكن بها إجراء هذه العملية .

الحل

$$\text{عدد الطرق} = 8 \text{ ق } 3 = \frac{8!}{3! (8 - 3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ طريقة.}$$

(ب) إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق مختلفة عددها ل وأمكن إجراء عملية أخرى بطرق مختلفة عددها م، فإن عدد الطرق التي يمكن بها إجراء العمليتين معا هو ل م .  
مثال (١٠) : ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة من ٣ رجال ، ٢ نساء من بين ٦ رجال ، ٥ نساء .

الحل

$$\text{عدد طرق اختيار الرجال} = {}^6P_3 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20 \text{ طريقة} .$$

$$\text{عدد طرق اختيار النساء} = {}^5P_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10 \text{ طرق}$$

$$\text{عدد طرق تكوين البعثة} = 20 \times 10 = 200 \text{ طريقة} .$$

(١-٤-٣) — أمثلة على الاحتمالات :

مثال (١١) : صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٤ حمراء . سحبته منه كرة واحدة . فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(I) بيضاء ؟ (II) حمراء ؟

الحل

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة من الصندوق

$$= {}^9P_1 = \frac{9!}{1! \times 8!} = 9 \text{ طرق} .$$

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$$= {}^5P_1 = \frac{5!}{1! \times 4!} = 5 \text{ طرق}$$

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$$= {}^4P_1 = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \text{ طرق}$$



$$\therefore (I) \text{ احتمال سحب كرة بيضاء } = \frac{5}{9}$$

$$(II) \text{ احتمال سحب كرة حمراء } = \frac{4}{9}$$

ونلاحظ في هذا لمثال أن مجموع الاحتمالات في (I)، (II) يساوي الواحد الصحيح لأن الكرة المسحوبة إما أن تكون بيضاء أو حمراء وهذه حادثة مؤكدة.

**مثال (١٢) :** صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء، سحبته منه كرتان فما هو احتمال أن تكون الكرتان :

(I) بيضاء ؟ (II) واحدة بيضاء والأخرى حمراء ؟

الحل

(I) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتان من الصندوق

$$= {}^9C_2 = \frac{9!}{2! \times 7!} = 36 \text{ طريقة} \cdot$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتين بيضاء من الصندوق

$$= {}^5C_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \text{ طرق} \cdot$$

$$\therefore \text{احتمال أن تكون الكرتان بيضاء} = \frac{10}{36}$$

(II) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$$= {}^5C_1 = 5 \text{ طرق}$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$$= {}^4C_1 = 4 \text{ طرق}$$

$\therefore$  عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء وكرة حمراء من الصندوق

$$= 5 \times 4 = 20 \text{ طريقة} \cdot$$

$$\therefore \text{احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء} = \frac{20}{36}$$

**مثال (١٣) :** ألقيت زهرة نرد مرة واحدة. فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي لها : (I) أقل من ٣ ؟ (II) ٤ فأكثر ؟

(I) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي = ٦

، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح رقم أقل من ٣

= ٢ (وهما ظهور الوجه ١ أو الوجه ٢)

∴ احتمال (الحصول على عدد أقل من ٣) =  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(II) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي ٤ فأكثر = ٣ (وهي الوجه ٤ أو الوجه ٥

أو الوجه ٦)

∴ احتمال الحصول على ٤ فأكثر =  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال (١٤) : ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة، فما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لهما ٥ .

### الحل

عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الأولى = ٦ طرق

، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الثانية = ٦ طرق

عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرتين معا =  $6 \times 6 = 36$  طريقة

عدد الطرق التي يمكن أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي ٥ هو = ٤ طرق

وهي (١، ٤) أو (٢، ٣) أو (٣، ٢) أو (٤، ١)

∴ احتمال ( أن يكون المجموع ٥ ) =  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

### ثانيا : التعريف التجريبي للاحتمالات :

يتضح من التعريف الكلاسيكي للاحتمال أنه يعتمد على عدة فروض أساسية — منها افتراض أن الحالات الممكنة كلها حالات متماثلة — وهذا الفرض يترتب عليه أن الحالات الممكنة كلها تكون متساوية الاحتمالات، فلو كان عددها  $n$  حالة مثلا (وهي طبعا متنافية) سيكون احتمال كل منها  $\frac{1}{n}$ ، ولكن هذا الفرض ليس دائما متوفرا في كل ما نصادفه من تجارب وظواهر طبيعية. فمثلا إذا حاولنا معرفة احتمال أن يكون المولود ذكرا في ولادة معينة وذلك باستخدام التعريف الكلاسيكي للاحتمال — سنجد أن الحالات الممكنة حالتان فقط (ذكر وأنثى) وهما ليسا متماثلتين لأنه من المعروف إحصائيا في كل زمان ومكان أن نسبة المواليد الذكور أكبر من نسبة المواليد الإناث (٥١ : ٤٩ تقريبا) وبالتالي تكون فرصة أن يكون المولود ذكرا أكبر من فرصة أن يكون أنثى وبالتالي لا يمكن حساب مثل هذا الاحتمال باستخدام التعريف الكلاسيكي لأنه يوصلنا إلى نتيجة مضللة لأنه يعتبر الحالات الممكنة  $n = 2$  والحالات المواتية  $m = 1$  حالة واحدة

(ذكر) و يكون الاحتمال  $\frac{1}{4}$  وهذا خطأ واضح . كذلك لو تصورنا وجود قطعة عملة غير متزنة (أحد وجهيها أثقل من الوجه الآخر) وبالتالي فرصة ظهور أحد الوجهين أكبر من فرصة ظهور الوجه الآخر فكيف نجد احتمال الحصول على الصورة واحتمال الحصول على الكتابة في هذه الحالة — من البديهي أنه لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي الذي يوصلنا إلى احتمال الحصول على الصورة يساوي تماماً الحصول على كتابة يساوي  $\frac{1}{4}$  — مثل هذه الملاحظات أدت إلى توجيه عدة انتقادات شديدة للتعريف الكلاسيكي الذي يكون قاصراً عن حساب الاحتمال في بعض الحالات مثل التي أوضحناها الآن — لذلك فإن التعريف الكلاسيكي يعتبر تعريفاً غير شامل ولا ينطبق إلا في حدود ضيقة جداً هي مجال ألعاب الصدفة مما دفع علماء الرياضة المهتمين بهذه الدراسة إلى وضع تعريف شامل يعتمد على التجربة والملاحظة وحصر الحالات التي يتحقق فيها الحدث المرغوب حساب احتماله وهذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي للاحتمال ويمكن صياغة هذا التعريف كما يلي :

### التعريف التجريبي للاحتمال:

إذا كررنا تجربة معينة مرات عددها  $n$  (تحت نفس الظروف) ولاحظنا أن حادثاً معيناً أ قد تحقق في  $m$  من هذه المرات فإن النسبة  $\frac{m}{n}$  تسمى بالتكرار النسبي للحدث أو تعتبر قيمة تجريبية لاحتمال وقوع هذا الحدث وتقرب هذه القيمة التقريبية من احتمال وقوع الحدث كلما كبرت  $n$  حتى أنه عندما تصبح  $n$  كبيرة كبراً لا نهائياً تصبح هذه القيمة التقريبية هي احتمال وقوع الحدث أ. ويكون:

احتمال وقوع الحدث أ هو  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$  عندما تكبر  $n$  كبراً لا نهائياً .  
وعادة نرمز إلى ذلك رياضياً بالصيغة التالية :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \quad \text{ن} \leftarrow \infty$$

(حيث أن نها هي اختصار لكلمة نهاية — ويكون معنى الرمز السابق أنه في النهاية عندما تكبر  $n$  كبراً لا نهائياً يكون الاحتمال  $P(A) = \frac{m}{n}$  .)

هذا التعريف يقوم على أساس ملاحظة الظاهرة موضوع الدراسة عدد كبير من المرات — فمن المعلوم أن أي ظاهرة طبيعية مثل المواليد والوفيات وغير ذلك من الظواهر تخضع لصفة نظامية محددة — وهذه قدرة الخالق المبدع سبحانه وتعالى خلق كل شيء بقدر — هذه الصفة النظامية لا تظهر في الحالات القليلة العدد ولكنها تظهر بوضوح في الحالات الكبيرة العدد . كما أن هذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي لأنه يعتمد على ملاحظة التجربة — كما أنه يسمى أحياناً بالتعريف البعدي

لأن الاحتمال يتم حسابه بعد إجراء التجربة عدد كبير من المرات وهذا يختلف عن التعريف الكلاسيكي الذي يمكن استخدامه في حساب الاحتمال قبل إجراء التجربة .

مثال (١٥) : لدينا قطعة عملة معروف أنها غير متزنة — تم إلقاؤها ألف مرة فظهرت الصورة ٥٥٠ مرة والكتابة ٤٥٠ مرة . فما هو احتمال الحصول على الصورة عند إلقاء هذه القطعة ؟

### الحل

بما أن الصورة ظهرت ٥٥٠ مرة من بين ألف مرة — إذن نسبة ظهور الصورة  $= \frac{٥٥٠}{١٠٠٠} = ٥٥\%$  وهذه النسبة يمكن اعتبارها تقريبا احتمال الحصول على الصورة وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$ح = ٥٥\%$$

مثال (١٦) : أجرى طبيب ٥٠٠ عملية جراحية ونجح منها ٤٨٠ عملية فما احتمال نجاح عملية يجريها هذا الطبيب ؟

### الحل

عدد مرات إجراء العملية ن = ٥٠٠

عدمرات نجاح العملية م = ٤٨٠

$$احتمال نجاح العملية = \frac{٤٨٠}{٥٠٠} = ٩٦\%$$

مثال (١٧) : في مصنع للمصابيح الكهربائية تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح يوجد ٥٠ مصباحا غير صالح للاستعمال . فما هو احتمال وجود مصباح جيد ؟

### الحل

عدد المصابيح ن = ١٠٠٠ مصباح

عدد المصابيح الجيدة م = ٩٥٠ مصباحا

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{٩٥٠}{١٠٠٠} = \frac{٩٥}{١٠٠} = ٩٥\%$$

(١-٤-٤) — بعض المصطلحات :

إذا كانت أ ترمز إلى وقوع حدث معين وليكن (أ)

، كانت ب ترمز إلى وقوع حدث معين آخر وليكن (ب)

فإن :

أ ترمز إلى عدم وقوع الحدث أ

ب ترمز إلى عدم وقوع الحدث ب

(أ و ب) ترمز إلى وقوع الحدثين أ، ب معا  
 (أ أو ب) ترمز إلى وقوع الحدث أ أو الحدث ب أو كلاهما معا .  
 (أ | ب) ترمز إلى وقوع الحدث أ علما بأن الحدث ب قد وقع فعلا .

#### (١-٤-٥) - بعض التعاريف :

(١) يقال إن الحدثين أ، ب مانعان أو متنافيان أو متعارضان ، إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر .

(٢) يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث الآخر .

#### (١-٥) - بعض قوانين الاحتمالات :

(أ) حالة الحوادث المعانة (المتنافية) :

إذا كان أ، ب حادثين مانعين (متنافيين) فإن :

$$ح(أ أو ب) = ح(أ) + ح(ب)$$

مثال (١٨) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب . فما هو احتمال أن تحمل الرقم ثلاثة أو صورة ؟

#### الحل

نفرض أن أ — الورقة المسحوبة ثلاثة

ب — الورقة المسحوبة صورة

∴ أ ، ب حادثان مانعان

$$∴ ح(أ أو ب) = ح(أ) + ح(ب)$$

$$\frac{4}{13} = \frac{16}{52} = \frac{12}{52} + \frac{4}{52} =$$

#### ملحوظة (٢) :

يمكن تعميم القاعدة السابقة . فإذا كان أ ، أ<sub>١</sub> ، أ<sub>٢</sub> ، أ<sub>٣</sub> ، ..... ، أن هي ن حادثة مانعة

فإن : ح(أ<sub>١</sub> أو أ<sub>٢</sub> أو أ<sub>٣</sub> ، ..... أو أ<sub>ن</sub>)

$$= ح(أ<sub>١</sub>) + ح(أ<sub>٢</sub>) + ح(أ<sub>٣</sub>) + ..... + ح(أ<sub>ن</sub>)$$

مثال (١٩) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب . فما هو احتمال أن تكون الورقة تحمل الرقم ثلاثة أو ثمانية أو صورة؟

الحل

نفرض أن أ — الورقة المسحوبة ثلاثة

أ — الورقة المسحوبة ثمانية

أ — الورقة المسحوبة صورة

وهذه حوادث مانعة .

$$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{13} + \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

(ب) حالة الحوادث غير المانعة :

إذا كان أ ، ب حادثتين غير مانعتين فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (٢٠) : ألقيت زهرة نرد مرة واحدة . فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي يقبل القسمة على ٢ أو ٣؟

الحل

نفرض أن أ — السطح العلوي يقبل القسمة على ٢

ب — السطح العلوي يقبل القسمة على ٣

أ ، ب حادثتان غير مانعتين

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال (٢١) : في المثال السابق (رقم ٢٠) احسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من ٢ .

الحل

نفرض أن أ — العدد الزوجي

ب — العدد أكبر من ٢

أ ، ب — حادثان غير مانعين .

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3}{6}$$

(ج) حالة الحوادث غير المستقلة :

إذا كانت أ ، ب حادثتين غير مستقلتين فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= P(B) \cdot P(A|B)$$

حيث  $P(A|B)$  يسمى الاحتمال الشرطي ، أي احتمال وقوع الحادث ب بشرط أن الحادث أ يكون قد وقع فعلا .

مثال (٢٢) : صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٣ كرات حمراء ، سحبته عشوائيا كرتان على التوالي (أي بدون إرجاع الكرة الأولى) . فما هو احتمال أن تكون الكرتان بيضاء ؟

الحل

نفرض أن أ — الكرة الأولى بيضاء .

ب — الكرة الثانية بيضاء

أ ، ب حادثتان غير مستقلتين وذلك لأن احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية يعتمد على لون الكرة الأولى .

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

مثال (٢٣) : في المثال السابق (رقم ٢٢) احسب احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء .

الحل

نفرض أن أ — الكرة بيضاء

ب — الكرة حمراء

١ — رمز الأولى

٢ — رمز الثانية

$$(أ و ب) = أما (أ و ب) أو (ب و أ)$$

$$\therefore ح (أ و ب) = ح (أ و ب) + ح (ب و أ)$$

$$= ح (أ) ح (ب | أ) + ح (ب) ح (أ | ب)$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$$

ملحوظة :

إذا كان  $أ_1, أ_2, أ_3, \dots, أ_n$  هي ن حادثه غير مستقلة فان

$$ح (أ_1 و أ_2 و أ_3 و \dots و أ_n) = ح (أ_1) \times ح (أ_2 | أ_1)$$

$$\times ح (أ_3 | أ_1, أ_2) \times \dots \times ح (أ_n | أ_1, أ_2, \dots, أ_{n-1})$$

مثال (٢٤) : صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء سحبته منه على التوالي ٣ كرات فما هو احتمال أن تكون جميعها بيضاء؟

الحل

١- الكرة الأولى بيضاء

٢- الكرة الثانية بيضاء

٣- الكرة الثالثة بيضاء

هذه الحوادث الثلاث غير مستقلة :

$$\therefore ح (أ_1 و أ_2 و أ_3) = ح (أ_1) \times ح (أ_2 | أ_1) \times ح (أ_3 | أ_1, أ_2)$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{42}$$

(د) حالة الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ، ب حادثتين مستقلتين فإن :

$$ح (أ و ب) = ح (أ) \cdot ح (ب)$$

$$= ح (ب) \cdot ح (أ)$$

مثال (٢٥) : إذا كان احتمال أن يموت شخص أ خلال ٨ سنوات هو ٣٠٪، واحتمال أن يموت شخص آخر ب خلال نفس المدة هي ١٥٪ احسب احتمال أن يكون أ، ب قد ماتا خلال هذه المدة.



## الحل

نفرض أن أ = موت الشخص أ خلال ٨ سنوات  
 ب = موت الشخص ب خلال ٨ سنوات  
 أ ، ب حادثتان مستقلتان.  
 $\therefore$  ح (أ و ب) = ح (أ) . (ب)  
 $0.02 = 0.015 \times 0.03 =$

### ملحوظة (٣):

إذا كان ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن هي ن حادثة مستقلة. فإن  
 ح (١ و ٢ و ٣ و ... و ن) =  
 = ح (١) . ح (٢) . ح (٣) . ... ح (ن)  
 (١-٦) - نظرية بيز:

إذا كانت أ ، أ ، ... ، أن هي ن حادثة مانعة وشاملة وكان هناك حادثة أخرى ب لا تقع إلا مع إحدى حالات أ (أي أن ب تقع إذا وقعت واحدة من هذه الحوادث المانعة) فإن:

$$ح (أ و ب) = \frac{ح (أ) . ح (ب | أ)}{ح (أ) . ح (ب | أ) + ح (ب | \bar{أ})}$$

### البرهان

حيث أن أ ، أ ، ... ، أن حوادث مانعة وحيث أن ظهور إحداها ينتج عنه ظهور حادثة أخرى ب فإن: ب = (أ و ب) أو (أ و ب) أو (أ و ب) أو (أ و ب) أو (أ و ب)

### ويكون

$$ح (ب) = ح (أ و ب) + ح (أ و ب) + ... + ح (أ و ب) + ح (أ و ب) =$$

$$= \frac{ح (أ) . ح (ب | أ) + ح (أ) . ح (ب | \bar{أ})}{ح (أ) . ح (ب | أ) + ح (أ) . ح (ب | \bar{أ})}$$

$$\text{وحيث أن: } C(A \cup B) = C(A) + C(B|A) \\ C(B|A) = C(A \cap B) / C(A)$$

$$\text{فان: } C(A \cup B) = \frac{C(A) + C(A \cap B)}{C(A)} \\ \therefore C(A \cup B) = \frac{C(A) + C(A \cap B)}{C(A)}$$

وهو المطلوب

مثال (٢٦): ثلاثة مصانع I ، II ، III ، لإنتاج المصابيح الكهربائية لإحدى المحلات التجارية. فإذا كانت هذه المصانع تنتج على التوالي ٢٠% ، ٣٥% ، ٤٥% من المصابيح التي يبيعها المحل. وكان احتمال إنتاج مصباح تالف من المصانع I ، II ، III ، هو ١٢% ، ١٥% ، ٠٨% ، على التوالي. فإذا اشترى شخص مصباحا من هذا المحل فاحسب:

- (١) احتمال أن يكون المصباح تالفا.
- (٢) إذا علم أن المصباح تالف فما هو احتمال أن يكون من إنتاج المصنع II .

الحل

نفرض أن  $A_1$  المصباح من إنتاج المصنع I  
 $A_2$  المصباح من إنتاج المصنع II  
 $A_3$  المصباح من إنتاج المصنع III  
 ب المصباح تالف  
 نعلم أن:

$$C(A_1) = 0.20$$

$$C(A_2) = 0.35$$

$$C(A_3) = 0.45$$

كما نعلم أن:

$$C(B|A_1) = 0.12$$

$$ح (ب | ٢^1) = ٠.١٥$$

$$ح (ب | ٢^1) = ٠.٠٨$$

$$(١) \text{ حيث أن } ب = (١ \text{ و } ب) \text{ أو } (٢ \text{ و } ب) \text{ أو } (٣ \text{ و } ب)$$

$$\therefore ح (ب) = \sum_{٢=١}^٣ ح (٢ | ب) =$$

$$= (٠.٢) (٠.١٢) + (٠.٣٥) (٠.١٥) + (٠.٤٥) (٠.٠٨)$$

$$= ٠.١١٢٥$$

$$\frac{ح (٢^1) \cdot ح (ب | ٢^1)}{ح (ب)} = ح (٢ | ٢^1)$$

$$٠.٤٧ = \frac{(٠.٣٥) (٠.١٥)}{٠.١١٢٥} =$$

## أمثلة عامة

مثال (١):

فصل به ٣٠ طفلا، ١٢ ولدا، ١٨ بنتا فإذا كان من بينهم ٤ أولاد، ٨ بنات متفوقين. اختير طفلا عشوائيا ليكون عريفا على الفصل. أوجد احتمال أن يكون العريف:

- ١- ولد متفوق
- ٢- بنت متفوقة
- ٣- متفوق
- ٤- إذا علم أن العريف متفوق فما احتمال أن يكون بنت؟

الحل

أ- العريف الذي سيختار ولد

أ- العريف الذي سيختار بنت

ب - العريف الذي سيختار متفوق

(١) احتمال أن يكون العريف ولدا متفوقا =  $P(A \cap B)$  (ب و أ)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \\ = \frac{12}{30} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{30}$$

(٢) احتمال أن يكون العريف بنتا متفوقة =  $P(A \cap B)$  (ب و أ)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \\ = \frac{18}{30} \cdot \frac{8}{18} = \frac{8}{30}$$

(٣) احتمال أن يكون العريف متفوقا يعني إما أن يكون ولدا متفوقا أو بنتا متفوقة

$$\therefore P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{30} + \frac{8}{30} = \frac{12}{30}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A)} \quad (٤)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{\frac{8}{12} \times \frac{18}{30}}{\frac{12}{30}} =$$

مثال (٢) :

ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة فما هو احتمال الحصول على مجموع ٤ أو ١٢ ؟

الحل

أ - الحصول على مجموع ٤

ب - الحصول على مجموع ١٢

أ، ب حادثتان مانعتان (متنافيتان)

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} =$$

$$\frac{1}{9} = \frac{4}{36} =$$

مثال (٣) :

أعلنت جامعة الملك عبد العزيز عن شغل ٣ وظائف سكرتارية بها، فتقدم لها ٤ رجال، ٣ نساء . وعند الاختيار وجدت اللجنة أنهم جميعا متساوون في الخبرة والمؤهلات فقررت الاختيار عشوائيا، احسب احتمال اختيار:

٢ - رجلان على الأقل

١ - رجلان

الحل

يلاحظ أن احتمال اختيار رجل في المحاولة الأولى لا يساوي احتمال اختيار رجل في المحاولة الثانية .

١ - هناك ٣ ترتيبات يمكن بها اختيار ٢ رجل من بين ٣ لشغل الوظيفة وهي  ${}^3P_2 = 3$

$$\text{— احتمال الحصول على أي ترتيب} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{35}$$

$$\therefore \text{احتمال اختيار رجلين} = \frac{18}{35} = \frac{6}{35} \times 3 =$$

٢ — رجلان على الأقل تعني رجلين أو ثلاث رجال

$$(أ) \text{ احتمال اختيار رجلين} = \frac{18}{30}$$

(ب) هنالك حالة واحدة يمكن بها اختيار ٣ رجال من بين ٣ وهى

$${}^3C_3 = 1$$

$$\text{احتمال الحصول على هذه الحالة} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{30}$$

$$\therefore \text{احتمال اختيار رجلين على الأقل} = \frac{18}{30} + \frac{4}{30} = \frac{22}{30}$$

مثال (٤) :

مخزنان الأول به ٢٠ سلعة جيدة، ٥ رديئة، والثاني به ٣٠ سلعة جيدة، ١٠ رديئة، سحبت سلعة من كل من المخزين، فما هو احتمال أن تكون سلعة واحدة على الأقل من السلعتين جيدة؟

الحل

أ— سلعة جيدة من المخزن الأول .

ب— سلعة جيدة من المخزن الثاني .

أ، ب حادثان غير مانعين .

$$\therefore \text{ح (أ أو ب)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ب)} - \text{ح (أ و ب)}$$

$$= \frac{20}{40} + \frac{30}{40} - \frac{20}{40} =$$

$$= \frac{4}{40} + \frac{3}{40} - \frac{2}{40} = \frac{19}{40} = 0.475$$

=====

## تمارين

- ١ — حقية بها ٥ كرات سوداء، ٤ بيضاء سحبت ٣ كرات عشوائيا، أوجد احتمال أن يكون اثنان منهما سوداوين .
- ٢ — حقية بها ٣ كرات سوداء، ٤ بيضاء، وحقية أخرى بها ٥ كرات سوداء وكرتان بيضاء . نقلت كرة من الحقية الأولى إلى الثانية ثم سحبت كرة من الحقية الثانية، فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟
- ٣ — كيس يحتوي على ٤ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، اختار شخص كرتين عشوائيا فما هو احتمال حصوله على واحدة من كل لون ؟
- ٤ — مكتبة ذات ثلاثة أرفف، الأول به ٢٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثاني به ٢٠ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثالث به ١٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء . أختير أحد الأرفف وسحب منه كتاب أوجد الاحتمالات الآتية :  
 (أ) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن الرف الأول .  
 (ب) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن المكتبة .  
 (ج) إذا علم أن الكتاب المسحوب أخضر فما احتمال أن يكون من الرف الأول ؟
- ٥ — مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، فإذا كان احتمال أن يكون المصباح من هذا الإنتاج تالفا هو  $\frac{1}{10}$  واخترنا عشوائيا ٤ مصابيح، فما هو احتمال أن يكون من بينها مصباح على الأكثر تالف ؟
- ٦ — إذا كان ٢٥٪ من الطلبة، ١٥٪ من الطالبات بإحدى الكليات يدرسون الرياضيات وكانت الطالبات تكون ٤٠٪ من العدد الكلي لتلاميذ الكلية . أختير تلميذ عشوائيا ووجد أنه يدرس الرياضيات . فما احتمال أن يكون هذا التلميذ طالبة ؟
- ٧ — ثلاث صناديق يحتوي الأول على ٣ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء ويحتوي الثاني على ٣ كرات بيضاء، ٥ كرات حمراء ويحتوي الثالث على ٢ كرة بيضاء، ٣ كرات حمراء  
 أختير صندوق عشوائيا وسحبت منه كرة عشوائيا .  
 (أ) فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟  
 (ب) إذا علم أن الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الثالث ؟
- ٨ — عند إلقاء ٣ قطع عملة دفعة واحدة — ما هو احتمال الحصول على صورتين على الأكثر ؟

٩ — ستة رجال كل منهم معه زوجته وجلس الاثنا عشر في غرفة واحدة .  
أ — إذا اخترنا شخصين عشوائيا من بين الاثني عشر شخصا فما هو احتمال أن يكونا زوجا وزوجته ؟

ب — إذا اخترنا ٤ أشخاص عشوائيا من الحجرة أوجد الاحتمالات الآتية :  
أولا : أن يكونوا زوجين وزوجتيهما .  
ثانيا : أن لا يوجد زوج وزوجته بين الأربعة المختارين .  
ثالثا : أن يوجد زوج وزوجته والباقي مختلف .

\* \* \*



## الباب الثاني

### التوزيعات الاحتمالية



# التوزيعات الاحتمالية

## (٢-١) - المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى المتغير العشوائي، وهذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (١) : إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة. هنا التجربة العشوائية هي إلقاء الزهرتين، ونتيجة التجربة هي النقاط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. هذا المقدار يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ وعلى ذلك فإن مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين متغير عشوائي. متغير لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة وعشوائي لأنه يرافق نتائج تجربة عشوائية.

مثال (٢) : اختيار طالب من بين طلاب الجامعة. التجربة العشوائية هي اختيار طالب ونتيجة التجربة أحد طلاب الجامعة. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب — دخل أسرة الطالب — عدد أفراد أسرة الطالب .. الخ. فإن اقتصرت دراستنا على طول الطالب فإن هذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب طول الطالب الذي اختير وربما تأخذ أي قيمة ١٦٥ سم أو ١٦٦ أو أي قيمة بينهما. وعلى ذلك فإن طول الطالب متغير عشوائي لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

## (أ) المتغير العشوائي المنفصل:

يقال إن المتغير العشوائي منفصل إذا أخذ قيما منفصلة عن بعضها البعض أي يوجد بينهما ثغرات.

مثال (٣) : عدد أفراد الأسرة متغير منفصل لأنه يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠. وهذه القيم يوجد بينها ثغرات، فمثلا لا يوجد عائلة عدد أفرادها  $\frac{1}{4}$  فرد.

مثال (٤) : مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة.

## (ب) المتغير العشوائي المتصل:

يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيره.

مثال (٥) : طول الطالب متغير متصل لأنه يأخذ أي قيمة في نطاق تغير الطول، فإذا كانت أصغر



مثال (٨) : اشترى شخص ٤ بطيخان ، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو  $\frac{2}{5}$  ، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد البطيخ التالف .

### الحل

نفرض أن س هي عدد البطيخ التالف

س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،

نوجد احتمالات أن تأخذ س هذه القيم

س = صفر يعني أن البطيخات كلها جيدة

نعني أن الأولى جيدة والثانية جيدة والثالثة جيدة والرابعة جيدة وهذه حوادث جميعا مستقلة .

$$ح(س = ٠) = ح(الأولى جيدة) \times ح(الثانية جيدة) \times ح(الثالثة جيدة) \times ح(الرابعة جيدة)$$

$$\frac{81}{625} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} =$$

س = ١ يعني أن هناك بطيخة واحدة تالفة والثلاث الأخرى جيدة وهناك أربع حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$ح(س = ١) = ٤ \times ح(الأولى تالفة) \times ح(الثانية جيدة) \times ح(الثالثة جيدة) \times ح(الرابعة جيدة)$$

$$= ٤ \times \left( \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \right) = \frac{216}{625}$$

س = ٢ يعني أن هناك بطيختين تالفتين و بطيختين جيدتين وهناك ٦ حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$ح(س = ٢) = ٦ \times ح(الأولى تالفة) \times ح(الثانية تالفة) \times ح(الثالثة جيدة) \times ح(الرابعة جيدة)$$

$$= ٦ \times \left( \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \right) = \frac{216}{625}$$

س = ٣ يعني أن هناك ٣ بطيخات تالفة وواحدة جيدة

وهناك ٤ حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$\therefore ح(س = ٣) = ٤ \times ح(الأولى تالفة) \times ح(الثانية تالفة) \times ح(الثالثة تالفة) \times ح(الرابعة جيدة)$$

$$\frac{16}{625} = \left( \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \right) \varepsilon =$$

س = ٤ يعني أن جميع البطيخات تالفة

ح (س = ٤) = ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية تالفة) × ح (الثالثة تالفة) × ح (الرابعة تالفة).

$$\frac{16}{625} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} =$$

على ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ح (س)	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	١

مثال (٩): ألقىت زهرتي نرد مرة واحدة ، أوجد التوزيع الاحتمالي لمجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي .

الحل

نفرض أن س هي مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي  
س تأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

نتائج التجربة	١٠١	٢٠١	٣٠١	٤٠١	٥٠١	٦٠١	٦٠٢	٦٠٣	٦٠٤	٦٠٥	٦٠٦
		١٠٢	٢٠٢	٣٠٢	٤٠٢	٥٠٢	٥٠٣	٥٠٤	٥٠٥	٥٠٦	
			١٠٣	٢٠٣	٣٠٣	٤٠٣	٤٠٤	٤٠٥	٤٠٦		
				١٠٤	٢٠٤	٣٠٤	٣٠٥	٣٠٦			
					١٠٥	٢٠٥	٢٠٦				
						١٠٦					
س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

$$\therefore \text{ح (س = ٢)} = \text{ح (١ ، ١)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$C(1, 2) + C(2, 1) = C(3, 3)$$

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} =$$

$$C(1, 3) + C(2, 2) + C(3, 1) = C(4, 3)$$

$$\frac{2}{36} = \left( \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) 2 =$$

وهكذا حتى

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = C(6, 6) = C(12, 12)$$

وعلى ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

المجموع	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	س
١	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	C(س, ١)

(ب) التوزيع الاحتمالي المستمر (المتصل):

إذا كانت س متغيراً عشوائياً مستمراً وكانت هناك دالة د(س) تحقق الشروط الآتية:

$$١ - د(س) \leq \text{صفر} \quad \text{لجميع قيم س.}$$

$$٢ - \int_{-\infty}^{\infty} د(س) دس = ١$$

فإنه يقال أن س متغير عشوائي يتبع توزيعاً احتمالياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية هي د(س). وفي هذه الحالة يكون:

$$C(س, ١) = \int_{-\infty}^{\infty} د(س) دس$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع س في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى الدالة د(س).

ملاحظة:

١ - الشرط الأول: يعني أن هذه الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي.

٢ - الشرط الثاني : يعنى أن المساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوي الواحد .

مثال (١٠) : أثبت أن الدالة الآتية هي دالة توزيع احتمالي مستمر .

$$د(س) = \frac{1}{8} س \quad \text{حيث} \quad ٠ \leq س \leq ٤$$

ثم أوجد : ج (١  $\leq$  س  $\leq$  ٣) ، ح (س  $\leq$  ٢)

$$، \quad \text{ح} \quad (س > ١)$$

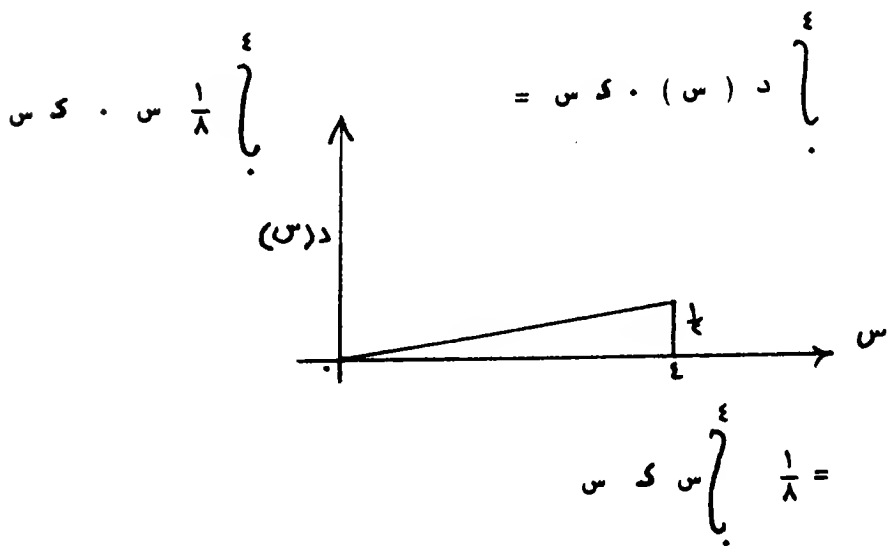
### الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي لابد من توافر الشروط السابق ذكرها .

— الشرط الأول هو أن الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي س متحقق حيث أن الدالة

موجبة في المدى صفر  $\leq$  س  $\leq$  ٤ .

— الشرط الثاني ، وهو أن المساحة تحت منحنى الدالة تساوي الواحد نثبتة فيما يلي :



$$\frac{1}{8} = \int_0^4 س دس$$

$$١ = \frac{1}{8} \left[ \frac{س^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{١٦}{2} = ١$$



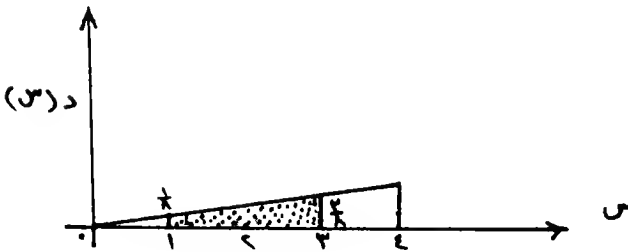
وهذا يحقق الشرط الثاني.

$$\therefore \text{الدالة د (س) = } \frac{1}{\lambda} \text{ س} \quad . \quad \text{س} \geq 0 \quad \text{و} \quad \text{س} \leq 4$$

دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س.

$$- \text{ح ( } 1 \leq \text{س} \leq 2 \text{ )} = \int_1^2 \frac{1}{\lambda} \text{ س} \cdot \text{ك س} \text{ س}$$

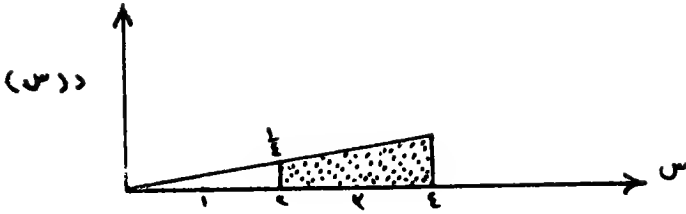
$$= \int_1^2 \frac{1}{\lambda} \text{ س} \cdot \text{ك س} \text{ س}$$



$$= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{16} = (1 - 9) \cdot \frac{1}{16} = \int_1^2 \left[ \frac{s^2}{4} \right] \frac{1}{\lambda} =$$

$$- \text{ح ( } 2 \leq \text{س} \text{ )} = \int_2^4 \frac{1}{\lambda} \text{ س} \cdot \text{ك س} \text{ س}$$

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} = \int_2^4 \left[ \frac{1}{x} \right] \frac{1}{x} dx$$

$$- \frac{1}{x} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} = \int_2^4 \left[ \frac{1}{x} \right] \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{4} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} = \int_2^4 \left[ \frac{1}{x} \right] \frac{1}{x} dx$$

مثال (١١): أثبت أن الدالة

$f(x) = \frac{1}{x}$  حيث  $0 < x < 1$  دالة توزيع احتمالي مستمر

الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي مستمر لابد من توافر الشروط السابق ذكرها.

الشرط الأول: متحقق حيث أن الدالة موجبة في المدى  $0 < x < 1$   
 الشرط الثاني: نثبت كما يلي:

$$\dot{I}_d(n) = \dot{I}_7(n-1) - \dot{I}_5(n)$$

$$= \int_0^1 (s - s^2) \, ds$$

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}_7 =$$

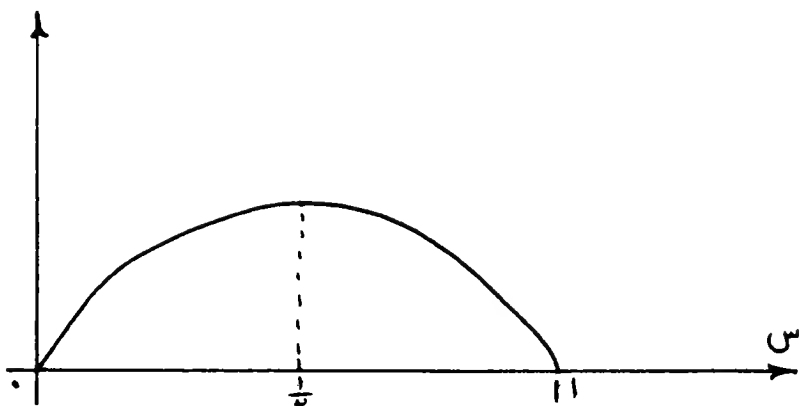
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_1 =$$

$$\left\{ \left( \cdot - \frac{1}{r} \right) - \left( \cdot - \frac{1}{r} \right) \right\} \tau =$$

$$\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) r =$$

$$1 = \frac{1}{7} \times 7 =$$

د(س)

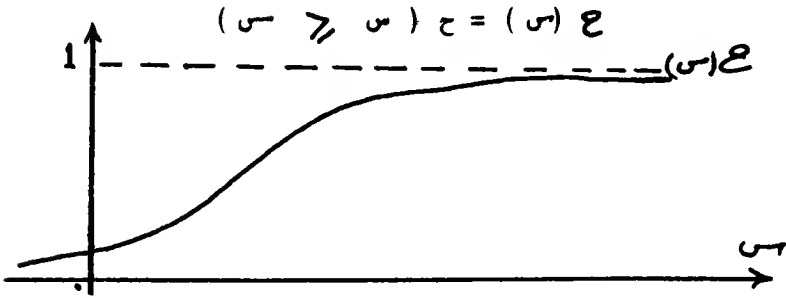


∴ الدالة د (س) = ٦ س (س - ١) حيث  $٠ \leq س \leq ١$

دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س .

## (٣-٢) - دالة التوزيع التراكمية :

يتحدد التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي  $X$  أما بدلالة دالته الاحتمالية أو بدلالة دالة جديدة تسمى دالة التوزيع التراكمية وتعرف بالآتي :



و يلاحظ على هذا التعريف ما يلي :

أ-  $F(x) = P(X \leq x)$  دالة غير متناقصة

ب-  $F(-\infty) = 0$  صفر

ج-  $F(+\infty) = 1$

كما يلاحظ أنه إذا كانت  $X$  متغيراً عشوائياً مستمراً فإن

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X < x) + P(X = x)$$

$$= \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

وبتفاضل الطرفين نجد أن

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_{-\infty}^x f(t) dt \right)$$

وهذا يعني أنه إذا عرفت دالة التوزيع التراكمية يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي والعكس صحيح . وبالمثل إذا كانت  $X$  متغيراً منفصلاً .

مثال (١٢) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي  $X$  هي

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad \text{حيث } x \geq 0, \lambda > 0$$

أوجد دالة التوزيع التراكمية .

الحل

دالة التوزيع التراكمية هي

$$ع (س) = ح (س) - ح (س) > س$$

$$= \int_{-\infty}^{س} د (س) دس$$

$$= \int_{-\infty}^{س} \frac{1}{8} دس$$

$$= \left[ \frac{س}{8} \right]_{-\infty}^{س}$$

$$= \frac{س}{8} - 0 \text{ حيث } س \geq 0$$

$$س > 0$$

$$س \geq 0$$

$$س \leq 0$$

$$\therefore ع (س) = \begin{cases} \frac{س}{8} & س \geq 0 \\ 0 & س < 0 \end{cases}$$

مثال (١٣) : أوجد دالة التوزيع التراكمية للمثال رقم (٨) .

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
ح (س)	$\frac{٨١}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٩٦}{٦٢٥}$	$\frac{١٦}{٦٢٥}$
ع (س)	$\frac{٨١}{٦٢٥}$	$\frac{٢٩٧}{٦٢٥}$	$\frac{٥١٣}{٦٢٥}$	$\frac{٦٠٩}{٦٢٥}$	$\frac{٦٢٥}{٦٢٥}$

## (٢-٤) - بعض خواص التوزيعات الاحتمالية :

يوجد عدة خواص تميز التوزيعات الاحتمالية نذكر منها خاصيتين هامتين وهما :

### (أ) القيمة المتوقعة للتوزيع :

القيمة المتوقعة للتوزيع أو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي هو القيمة المتوسطة للمتغير و يرمز لها بالرمز  $\mu$  وتعطى بالمعادلة :

$$\left. \begin{aligned} \sum x_i \cdot p_i &= \mu \quad \text{إذا كانت } x \text{ متغير منفصلا} \\ \sum x_i \cdot f_i &= \mu \quad \text{إذا كانت } x \text{ متغير متصلا} \end{aligned} \right\}$$

ويمكن تفسير متوسط التوزيع على أنه إذا تكررت التجربة العشوائية عددا لا نهائيا من المرات وفي كل مرة لاحظنا نتيجة التجربة وقيمة المتغير العشوائي الذي يرافقها فيكون متوسط التوزيع عبارة عن الوسط الحسابي لهذا العدد اللانهائي من قيم المتغير العشوائي .

### (ب) الانحراف المعياري للتوزيع :

يعرف تباین التوزيع كالآتي :

$$\left. \begin{aligned} \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 &= \sigma^2 \quad \text{إذا كانت } x \text{ متغير منفصلا} \\ \sum x_i^2 \cdot f_i - \mu^2 &= \sigma^2 \quad \text{إذا كانت } x \text{ متغير متصلا} \end{aligned} \right\}$$

والانحراف المعياري ( $\sigma$ ) هو الجذر التربيعي للتباين . و يقيس الانحراف المعياري مقدار تشتت قيم المتغير العشوائي .

مثال (١٤) : أوجد المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الآتي :

$$x = (1, 2, 3, 4, 5) \quad p = (0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.2) \quad \text{حيث } \sum p_i = 1$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{متوسط التوزيع } \mu &= \sum x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 = 3.1 \\ \sigma^2 &= \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.2 + 5^2 \cdot 0.2 - (3.1)^2 = 1.49 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2^2) \text{ د س س}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{s_1^2}{4} - \frac{s_2^2}{4} \right] \text{ د س س}$$

$$\frac{3-4}{12} \times \frac{1}{2} = \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ د س س}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \text{ د س س}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \text{ د س س} \quad \text{— تباین التوزيع}$$

$$= \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2^2) \text{ د س س} \quad \text{— تباین التوزيع}$$

$$= \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2^2) \text{ د س س}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{s_1^2}{4} - \frac{s_2^2}{4} \right] \text{ د س س}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ د س س}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4-4}{20} \times \frac{1}{2} \text{ د س س}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{10}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \text{ د س س}$$

$$\frac{9}{20} = \sigma \quad \text{الانحراف المعياري}$$

$$\frac{1}{20} \sqrt{\quad} =$$

مثال (١٥): أعلنت وزارة الصحة عن إرسال ٣ بعثات لدراسة إدارة المستشفيات فتقدم لها ٤ رجال، ٣ نساء. وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة— فتقرر اتباع طريقة الاختيار العشوائي.

أوجد-

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

(ب) متوسط عدد النساء المختارات .

(ج) الانحراف المعياري لعدد النساء المختارات .

الحل

نفرض أن  $s$  هي عدد النساء المختارات

∴  $s$  تأخذ القيم ٠، ١، ٢، ٣

$$ح (s = 0) = ق_3 = \left( \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{30}$$

$$ح (s = 1) = ق_3 = \left( \frac{2}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{18}{30}$$

$$ح (s = 2) = ق_3 = \left( \frac{4}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{12}{30}$$

$$ح (s = 3) = ق_3 = \left( \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{30}$$

∴ التوزيع الاحتمالي يكون

المجموع	٣	٢	١	٠	$s$
ح ( $s$ )	$\frac{1}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{4}{30}$	

$s$	ح ( $s$ )	$s$ ح ( $s$ )	$s^2$ ح ( $s$ )
٠	$\frac{4}{30}$	٠	٠
١	$\frac{18}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{18}{30}$
٢	$\frac{12}{30}$	$\frac{24}{30}$	$\frac{48}{30}$
٣	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{9}{30}$
$\Sigma$	١	$\frac{45}{30}$	$\frac{75}{30}$



∴ متوسط التوزيع =  $\sum s \cdot h (s)$

$$= \frac{40}{30} = 1.33 \text{ امرأة}$$

$$\sigma^2 = \sum s^2 \cdot h (s) - \mu^2$$

$$= \frac{40}{30} - \left( \frac{40}{30} \right)^2$$

$$= \frac{24}{49} = 0.49$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$
 ومنه نجد أن الانحراف المعياري للتوزيع

$$= \sqrt{0.49} = 0.7 \text{ امرأة}$$

### تمارين

١ — إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي تنتجها إحدى الشركات تتبع التوزيع الاحتمالي الآتي:

$$D(s) = (s) \cdot A = (s-1) \cdot s \cdot h(s) \text{ حيث } s \geq 1$$

س : العمر بالسنة

أ : مقدار ثابت

والمطلوب :

— إيجاد قيمة أ .

— إذا اختير مصباح عشوائي فما هو احتمال أن يعيش أكثر من ٤ شهور .

— أوجد متوسط عمر المصباح وكذلك الانحراف المعياري .

— أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانيا .

٢ — إذا كانت س تتبع التوزيع الأسّي الآتي :

$$D(s) = (s) \cdot A = 1 - s^2 \cdot h(s) \text{ حيث } s \geq 0$$

أوجد :

— قيمة أ

— ح (س)  $(1 > 1)$

— دالة التوزيع التراكمية .

— متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

٣ — أعلنت جامعة الملك عبد العزيز عن شغل ٣ وظائف سكرتارية فتقدم لها ٥ رجال ، ٥ نساء وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة ، فقررت اللجنة الاختيار عشوائيا .  
أوجد :

— التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

— متوسط عدد النساء المختارات وكذلك الانحراف المعياري .

— دالة التوزيع التراكمية .

٤ — إذا كان احتمال أن تصل الطائرة التي تقوم من مطار القاهرة متجهة إلى مطار جدة في موعدها هو  $\frac{2}{4}$  ، قامت خمس طائرات من القاهرة متجهة إلى جدة .  
أوجد :

— التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها .

— متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

— دالة التوزيع التراكمية .

٥ — اثبت أن الدالة

ح ( س ) = 1 ب س - 1 حيث : س = 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10

• 1  $\geq$  ب ، 1  $\geq$  1

1 + ب = 1

تمثل توزيعا احتماليا ، ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية وكذلك المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع .

## الباب الثالث

### بعض التوزيعات الاحتمالية



## بعض التوزيعات الاحتمالية

أولاً : توزيع ذي الحدين :

(١-٣) - تعريف :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين أو عدم ظهوره (مثل نجاح الطالب أو فشله ، المصباح الكهربائي جيد أو تالف ، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها ، إصابة طائرة الهدف للعدو أو عدم إصابتها له ، ظهور الصورة عند القاء قطعة نقود أو عدم ظهورها ، .... إلخ) وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو  $C$  (وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو  $1 - C$ ). فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة  $n$  مرة ، فإن احتمال ظهور هذا الحدث  $n$  مرة من بين  $n$  من هذه المحاولات هو :

$$C (n, C) = n C^n (1 - C)^{n - C}$$

حيث  $n$  تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ،  $n$

وبالتعويض بقيم  $n$  المختلفة نحصل على :

$$C (0, C) = 1 C^0 (1 - C)^{1 - 0} = 1 - C$$

$$C (1, C) = 1 C^1 (1 - C)^{1 - 1} = C$$

$$C (2, C) = 2 C^2 (1 - C)^{2 - 2} = 2 C^2$$

$$C (3, C) = 3 C^3 (1 - C)^{3 - 3} = 3 C^3$$

.

.

.

$$C (n, C) = n C^n (1 - C)^{n - n} = n C^n$$

ومنها نجد أن مجموع الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات قيم  $s$  المختلفة ويساوي  $\sum_{s=0}^n h(s)$  ومجموع الطرف الأيسر هو مفكوك ذي الحدين

$$1 = (h + l)^n$$

وعلى ذلك فإن  $\sum_{s=0}^n h(s) = \sum_{s=0}^n n h(s) = n - n = 0$

وهذا يبين أن  $h(s)$  هي دالة توزيع احتمالي، ويطلق عليها توزيع ذي الحدين.

(٢-٣) - بعض خصائص التوزيع:

(أ) متوسط التوزيع:

يمكن إثبات أن متوسط هذا التوزيع  $\sum_{s=0}^n s h(s) = n$

$$\sum_{s=0}^n s n h(s) = n - n = 0$$

(ب) الانحراف المعياري:

وكذلك يمكن إثبات أن

تباين التوزيع  $\sum_{s=0}^n s^2 h(s) = n$

$$n = \sum_{s=0}^n s^2 h(s) - n^2$$

والانحراف المعياري  $\sqrt{n}$

مثال (١): ألقيت قطعة نقود ٤ مرات. فما هو احتمال ظهور الصورة ٣ مرات.

## الحل

عدد التجارب أو المحاولات  $n = 4$

احتمال ظهور الصورة في أي مرة  $p = \frac{1}{3}$

احتمال عدم ظهور الصورة في أي مرة  $q = 1 - p = \frac{2}{3}$

بفرض أن  $s$  عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي

$$\therefore H(s) = \binom{4}{s} p^s q^{4-s} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, 3, 4$$

احتمال ظهور الصورة 3 مرات  $H(3) = \binom{4}{3} p^3 q^1$

$$= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$= \frac{4}{27}$$

$$= \frac{1}{27}$$

مثال (٢): اشترى شخص صندوقاً به ٥ بطيخات. فإذا كان احتمال أن تكون أي منهم تالفة هو

٠.٢، احسب احتمال أن تكون:

(I) ٢ تالفة (II) ٢ على الأكثر تالفة

(III) جميعها طيبة

## الحل

عدد المحاولات  $n =$  عدد البطيخات  $= 5$

احتمال أن تكون أي منهم تالفة  $p = 0.2$

احتمال أن تكون أي منهم جيدة  $q = 0.8$

نفرض أن  $s$  هو عدد البطيخات التالفة

$$\therefore H(s) = \binom{5}{s} p^s q^{5-s} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

حيث  $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

(I) احتمال أن تكون بطيختان تالفتين  $H(2) = \binom{5}{2} p^2 q^3$

$$= \binom{5}{2} (0.2)^2 (0.8)^3$$

$$= 0.2048$$

(II) احتمال أن تكون بطيختان على الأكثر تالفة = ح (س ≥ ٢)

$$\begin{aligned} &= \text{ح (س = ٠)} + \text{ح (س = ١)} + \text{ح (س = ٢)} \\ &= {}^0\text{ق} (٠.٢) \cdot (٠.٨)^0 + {}^1\text{ق} (٠.٢) \cdot (٠.٨)^1 + {}^2\text{ق} (٠.٢) \cdot (٠.٨)^2 \\ &= 0.32768 + 0.40960 + 0.20480 \\ &= 0.94208 \end{aligned}$$

(III) احتمال أن تكون جميعها طيبة = ح (س = ٠)

$$\begin{aligned} &= {}^0\text{ق} (٠.٢) \cdot (٠.٨)^0 \\ &= 0.32768 \end{aligned}$$

مثال (٣): إذا كان ١٠٪ من إنتاج إحدى آلات المسامير تالفاً، وسحبنا عشوائياً ٥ مسامير من إنتاج هذه الآلة. أوجد:

- ١- التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة وضعه في صورة جدول
- ٢- متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له.

الحل

عدد المسامير      ن = ٥

احتمال أن يكون أي مسمار تالفاً      = ٠.١

احتمال أن يكون أي مسمار غير تالف = ١ - ٠.١ = ٠.٩  
نفرض أن س = عدد المسامير التالفة  
وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$\text{ح (س)} = {}^s\text{ق} (٠.١) (٠.٩)^{٥-s}$$

حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

١- التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة:



بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بقيم س المختلفة نحصل على :

$$ح (س = ٠) = ق٠ (١ر) \cdot (٥ر)٠ = ٠.٥٩٠٤٩$$

$$ح (س = ١) = ق١ (١ر) (٩ر)١ = ٠.٣٢٨٠٥$$

$$ح (س = ٢) = ق٢ (١ر) (٩ر)٢ = ٠.٧٢٩٠$$

$$ح (س = ٣) = ق٣ (١ر) (٩ر)٣ = ٠.٠٠٨١٠$$

$$ح (س = ٤) = ق٤ (١ر) (٩ر)٤ = ٠.٠٠٠٤٥$$

$$ح (س = ٥) = ق٥ (١ر) (٩ر)٥ = ٠.٠٠٠٠١$$

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة في صورة جدول هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
ح (س)	٠.٥٩٠٤٩	٠.٣٢٨٠٥	٠.٧٢٩٠	٠.٠٠٨١٠	٠.٠٠٠٤٥	٠.٠٠٠٠١	١

٢- متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري :

$$\text{متوسط التوزيع} = ن ح$$

$$= ٥ \times ١ر$$

$$= ٥ر \cdot \text{مسمار تالف}$$

$$\text{— الانحراف المعياري للتوزيع} = \sqrt{ن ح}$$

$$= \sqrt{٥ر \times ١ر \times ٠.٩}$$

$$= \sqrt{٤٥ر \cdot \text{مسمار تالف}}$$

مثال (٤) : قدرت شركة للطيران أن احتمال وصوف الطائرة التي تقوم من لندن إلى مطار جدة في ميعادها هو ٧ر ، فإذا قامت ٤ طائرات من طائرات الشركة من مطار لندن متجهة إلى مطار جدة . فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها .

(ب) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول ومنه استنتج :

١ - احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها.

٢ - احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها.

(ج) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري.

### الحل

عدد الطائرات = ٤

احتمال وصول أي طائرة في موعدها = ٠.٧

احتمال عدم وصول أي طائرة في موعدها = ١ - ٠.٧ = ٠.٣

نفرض أن س عدد الطائرات التي تصل في ميعادها.

(أ) وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

ج (س) =  ${}^4C_s (0.7)^s (0.3)^{4-s}$  حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(ب) بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالي بقيم س المختلفة نحصل على:

$$ج (س = ٠) = {}^4C_0 (0.7)^0 (0.3)^4 = ٠.٠٠٨١$$

$$ج (س = ١) = {}^4C_1 (0.7)^1 (0.3)^3 = ٠.٠٧٥٦$$

$$ج (س = ٢) = {}^4C_2 (0.7)^2 (0.3)^2 = ٠.٢٦٤٦$$

$$ج (س = ٣) = {}^4C_3 (0.7)^3 (0.3)^1 = ٠.٤١١٦$$

$$ج (س = ٤) = {}^4C_4 (0.7)^4 (0.3)^0 = ٠.٢٤٠١$$

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها يكون:

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ج (س)	٠.٠٠٨١	٠.٠٧٥٦	٠.٢٦٤٦	٠.٤١١٦	٠.٢٤٠١	١

(١) احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها:

$$ج (س \leq ١) = ج (س = ١) + ج (س = ٢) + ج (س = ٣)$$

$$+ ج (س = ٤) - ١ = ج (س = ٠)$$

$$= ٠.٩٩١٩ = ٠.٠٠٨١ - ١$$

(٢) احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها:

$$\text{أي ح ( س } \leq ٣ ) = \text{ح ( س } = ٣ ) + \text{ح ( س } = ٤ )$$

$$= ٠.٢٤٠١ + ٠.٤١١٦$$

$$= ٠.٦٥١٧$$

(ج) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري:

$$\text{— متوسط التوزيع} = \text{ن ح}$$

$$= ٠.٧ \times ٤$$

$$= ٢.٨ \text{ طائرة}$$

$$\text{— الانحراف المعياري للتوزيع} = \sqrt{\text{ن ح}}$$

$$= \sqrt{٤ \times ٧ \times ٠.٣}$$

$$= \sqrt{٠.٨٤} \text{ طائرة}$$

مثال (٥): إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو ٠.٨، فإذا أغارت خمس طائرات على الهدف فأوجد:

١ — التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصيب الهدف.

٢ — متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له.

### الحل

عدد الطائرات المغيرة ن = ٥

احتمال إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة = ٠.٨

احتمال عدم إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة = ٠.٢

نفرض أن س عدد الطائرات التي تصيب الهدف.

وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$١ - \text{ح (س)} = {}^٥\text{ق س (٨) (٢) س} - ٥$$

حيث أن س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥

٢ — متوسط التوزيع والانحراف المعياري:



$$= \frac{m^2}{1 \cdot 3} - m$$

.

.

.

.

.

.

$$= \frac{m^3 - m}{1 \cdot 3} = (s = 3) \text{ ح}$$

.

.

.

.

.

.

ومنها نجد أن مجموع الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات قيم  $s$  المختلفة و يساوى

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s) \text{ ح}$$

ومجموع الطرف الأيسر

$$= m^0 - m + \frac{m^2}{1 \cdot 3} + \frac{m^3}{1 \cdot 3} + \frac{m^4}{1 \cdot 3} + \dots$$

$$= m^0 - m + m^2 - m^2 + m^3 - m^3 + \dots$$

$$= 1$$

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m^s}{s!} = (s) \text{ ح} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m^s}{s!}$$

وعلى ذلك فإن

وهذا يبين أن  $(s)$  هي دالة توزيع احتمالي و يطلق عليها توزيع بواسون.

والجدول الآتي يعطي قيم ه-م لبعض قيم (م):

م	ه-م	م	ه-م	م	ه-م	م	ه-م
٠	٠٠٠	١	٠٣٣	٢	٠١٢٢	٣	٠٠٤٥
١	٠٩٠٥	٢	٠٣٠١	٣	٠١١١	٤	٠٠٤١
٢	٠٨١٩	٣	٠٢٧٣	٤	٠١٠٠	٥	٠٠٣٧
٣	٠٧٤١	٤	٠٢٤٧	٥	٠٠٩١	٦	٠٠٣٣
٤	٠٦٧٠	٥	٠٢٢٣	٦	٠٠٨٢	٧	٠٠٣٠
٥	٠٦٠٧	٦	٠٢٠٢	٧	٠٠٧٤	٨	٠٠٢٧
٦	٠٥٤٩	٧	٠١٨٣	٨	٠٠٦٧	٩	٠٠٢٥
٧	٠٤٩٧	٨	٠١٦٥	٩	٠٠٦١	١٠	٠٠٢٢
٨	٠٤٤٩	٩	٠١٥٠	١٠	٠٠٥٥	١١	٠٠٢٠
٩	٠٤٠٧	١٠	٠١٣٥	١١	٠٠٥٠	١٢	٠٠١٨
١٠	٠٣٦٨						

(٣-٤) - بعض خصائص التوزيع:

(أ) متوسط التوزيع  $\mu = م$

البرهان

$$\sum_{s=0}^{\infty} s \cdot h(s) =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} s \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^s}{s!} =$$

$$= ه - م ( صفر + \frac{1}{1!} م + \frac{2}{2!} م + \frac{2}{3!} م + \frac{4}{4!} م + \dots )$$

$$= ه - م ( \frac{1}{1!} م + \frac{2}{2!} م + \frac{2}{3!} م + \dots )$$

$$= ه - م م$$

$$= م$$

(ب) الانحراف المعياري :

يمكن بنفس الأسلوب اثبات أن :

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^2 \cdot P(s) = 2$$

$$م =$$

$$\sqrt{م} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال (٦) : إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو حادثتين ، فما احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأيام ؟

الحل

نفرض أن س هي عدد الحوادث اليومية .

متوسط عدد الحوادث اليومية  $م = ٢$

$$\therefore \text{ح ( س )} = \frac{م^س \cdot e^{-م}}{س!} \quad \text{حيث } س = ٠, ١, ٢, \dots$$

$$\text{من الجدول نجد أن } ه - م = ٢ = ٠.١٣٥$$

$$\therefore \text{ح ( س )} = \frac{م^س \cdot (ه - م)}{س!}$$

احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأيام  $\text{ح ( س = ٣ )}$

$$= \frac{م^٣ \cdot (ه - م)}{٣!} = ٠.١٨٠$$

مثال (٧) : إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٠.٦ — فاحسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين .

الحل

نفرض أن س هي عدد الزلازل السنوية

متوسط عدد الزلازل السنوية = ٠.٦

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{(0.6)^س \cdot e^{-0.6}}{س!} \quad \text{حيث س} = 0, 1, 2, \dots$$

من الجدول نجد أن  $e^{-0.6} = 0.549$

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{(0.6)^س (0.549)}{س!}$$

احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين = ح (س = ٢)

$$= \frac{(0.6)^2 (0.549)}{2!}$$

$$= 0.099$$

مثال (٨) : إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبيرة هو ثلاث حرائق . فما هو احتمال أن يقع في أحد الشهور :

(I) حريقان ؟ (II) حريقان على الأكثر؟ (III) حريقان على الأقل ؟

الحل

نفرض أن س هي عدد الحرائق الشهرية في هذه المدينة

متوسط عدد الحرائق الشهرية = ٣

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{e^{-3} \cdot 3^س}{س!} \quad \text{حيث س} = 0, 1, 2, \dots$$

من الجدول نجد أن  $e^{-3} = 0.05$

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{3^س (0.05)}{س!}$$

$$(I) \text{ احتمال وقوع حريقين } = \text{ح (س = ٢)} = \frac{3^2 \cdot 0.05}{2!} = 0.225$$



(II) احتمال وقوع حريقين على الأكثر = ح (س ≥ ٢)

$$\begin{aligned} \text{ح} &= \text{ح (س = ٠)} + \text{ح (س = ١)} + \text{ح (س = ٢)} \\ &= \frac{(٠.٠٥)^٠ (٣)}{١!} + \frac{(٠.٠٥) ٣}{١!} + ٠.٢٢٥ \\ &= ٠.٠٥٠ + ٠.١٥٠ + ٠.٢٢٥ \\ &= ٠.٤٢٥ \end{aligned}$$

(III) احتمال وقوع حريقين على الأقل = ح (س ≤ ٢)

$$\begin{aligned} &= ١ - [\text{ح (س = ٠)} + \text{ح (س = ١)}] \\ &= ١ - (٠.٠٥ + ٠.١٥) \\ &= ١ - ٠.٢٠ \\ &= ٠.٨٠ \end{aligned}$$

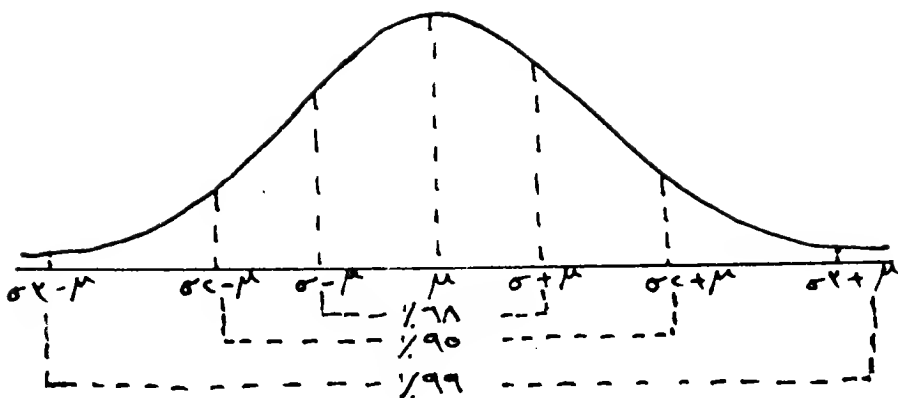
ثالثا : التوزيع الطبيعي :

(٣-٥) — مقدمة :

نعلم من دراستنا السابقة أن المنحنى الطبيعي يعتبر من أهم المنحنيات التكرارية في الإحصاء لأنه يمثل كثيرا من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال والأوزان والدخول والدرجات التي يحصل عليها الطلاب وغيرها من الظواهر المستمرة (المتصلة).

ومنحنى التوزيع الطبيعي يشبه الناقوس من حيث الشكل، ومن خصائصه أنه متماثل حول العمود الذي يمر بقمة هذا المنحنى لذلك فهو يقسمه إلى قسمين متماثلين تماما. كما أن هذا التوزيع يتحدد بمعرفة كل من وسطه ( $\mu$ ) وانحرافه المعياري ( $\sigma$ )، حيث  $\mu$  هي النقطة التي تتمركز حولها الغالبية العظمى من مفردات التوزيع،  $\sigma$  هو مقياس يبين تشتت أو تباعد المفردات عن بعضها.

ونلاحظ أن جميع مفردات التوزيع الطبيعي تقريبا تنحصر بين  $\mu - ٣\sigma$ ،  $\mu + ٣\sigma$  وأن ٩٥% من المفردات تنحصر بين  $\mu - ٢\sigma$ ،  $\mu + ٢\sigma$  تقريبا وأن ٦٨% من المفردات تنحصر بين  $\mu - \sigma$ ،  $\mu + \sigma$  تقريبا.



فإذا كانت هناك ظاهرة ما (نرمز لقيمها بالرمز  $\mu$ ) تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  فإن دالة كثافته الاحتمالية هي:

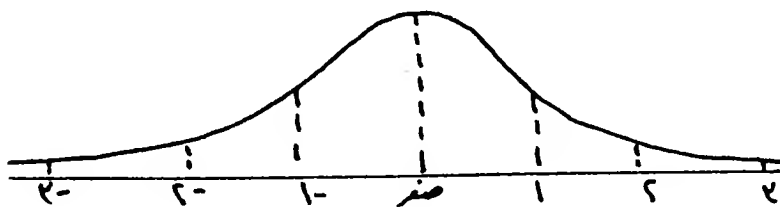
د (س) =  $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  حيث  $-\infty < s < \infty$   
 ط : مقدار ثابت

ويمكن حساب احتمال وقوع س في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى. ولتسهيل حساب مثل هذه الاحتمالات لابد أن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

### (٦-٣) - التوزيع الطبيعي القياسي:

هذا التوزيع له نفس خصائص أي توزيع طبيعي إلا أن وسطه  $\mu = 0$  وانحرافه المعياري

$$\sigma = 1$$



فإذا كانت ص ترمز لقيم متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي :  
 فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون :

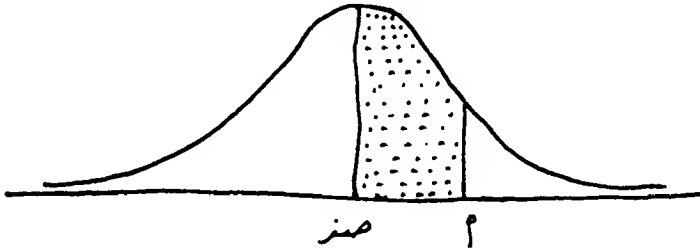
د (ص) =  $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$  -  $-\infty < v < \infty$

ويمكن اثبات أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} d\sigma = 1$$

وعملياً فإن الغالبية العظمى لقيم  $\sigma$  تقع بين  $-3$ ،  $+3$  أو بمعنى آخر فإنه نادراً ما نجد قيمة للمتغير  $\sigma$  تقع خارج هذا المدى . ويمكن حساب احتمال وقوع  $\sigma$  في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى ، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى .

وهناك جداول تعطى احتمالات وقوع المتغير  $\sigma$  في مدى معين . فمثلاً يمكن بواسطة هذه الجداول حساب احتمال وقوع  $\sigma$  بين  $1$  ،  $2$  وتكتب ح (  $1 < \sigma < 2$  ) . والجدول الآتي يعطي احتمالات وقوع  $\sigma$  بين صفراً وأي قيمة أخرى أي يعطي ح (  $0 < \sigma < 1$  ) .



فإذا رسمنا منحنى متماثلاً وسطه صفر وأخذنا نقطة أعلى المحور الأفقي فيكون ح (  $0 < \sigma < 1$  ) هي المساحة المظللة في الشكل . ويمكن الحصول على هذه المساحة ( الاحتمال ) من الجدول بعد معرفة قيمة أ .

و يلاحظ أن الجدول يعطي المساحة بين نقطة الأصل وقيم أ الموجبة ، كما نجد أن أ تبدأ من القيمة صفر وتزداد بمقدار ٠١ رحتى تصل إلى ٣٠٩ وهي أعلى قيمة يأخذها المتغير  $\sigma$  . ونظراً لأن المنحنى متماثل تماماً حول المستقيم المار بنقطة الأصل ( وسط التوزيع  $\mu = 0$  صفر ) فيمكن استخدام الجدول لإيجاد المساحة المحصورة بين صفر وقيم أ السالبة كما يتضح من الأمثلة الآتية :

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

ص	صفر	٠.١	٠.٢	٠.٣	٠.٤	٠.٥	٠.٦	٠.٧	٠.٨	٠.٩
صفر	صفر	٠.٠٤٠	٠.٠٨٠	٠.١٢٠	٠.١٦٠	٠.١٩٩	٠.٢٣٩	٠.٢٧٩	٠.٣١٩	٠.٣٥٩
٠.١	٠.٣٩٨	٠.٤٣٨	٠.٤٧٨	٠.٥١٧	٠.٥٥٧	٠.٥٩٦	٠.٦٣٦	٠.٦٧٥	٠.٧١٤	٠.٧٥٣
٠.٢	٠.٧٩٣	٠.٨٣٢	٠.٨٧١	٠.٩١٠	٠.٩٤٨	٠.٩٨٧	١.٠٢٦	١.٠٦٤	١.١٠٣	١.١٤١
٠.٣	١.١٧٩	١.٢١٧	١.٢٥٥	١.٢٩٣	١.٣٣١	١.٣٦٨	١.٤٠٦	١.٤٤٣	١.٤٨٠	١.٥١٧
٠.٤	١.٥٥٤	١.٥٩١	١.٦٢٨	١.٦٦٤	١.٧٠٠	١.٧٣٦	١.٧٧٢	١.٨٠٨	١.٨٤٤	١.٨٧٩
٠.٥	١.٩١٥	١.٩٥٠	١.٩٨٥	٢.٠١٩	٢.٠٥٤	٢.٠٨٨	٢.١٢٣	٢.١٥٧	٢.١٩٠	٢.٢٢٤
٠.٦	٢.٢٥٧	٢.٢٩١	٢.٣٢٤	٢.٣٥٧	٢.٣٨١	٢.٤٢٢	٢.٤٥٤	٢.٤٨٦	٢.٥١٧	٢.٥٤٩
٠.٧	٢.٥٨٠	٢.٦١١	٢.٦٤٢	٢.٦٧٣	٢.٧٠٤	٢.٧٣٤	٢.٧٦٤	٢.٧٩٤	٢.٨٢٣	٢.٨٥٢
٠.٨	٢.٨٨١	٢.٩١٠	٢.٩٣٩	٢.٩٧٦	٢.٩٩٥	٣.٠٢٣	٣.٠٥١	٣.٠٧٨	٣.١٠٦	٣.١٣٣
٠.٩	٣.١٥٩	٣.١٨٦	٣.٢١٢	٣.٢٣٨	٣.٢٦٤	٣.٢٨٩	٣.٣١٥	٣.٣٤٠	٣.٣٦٥	٣.٣٨٩
١.٠	٣.٤١٣	٣.٤٣٨	٣.٤٦١	٣.٤٨٥	٣.٥٠٨	٣.٥٣١	٣.٥٥٤	٣.٥٧٧	٣.٥٩٩	٣.٦٢١
١.١	٣.٦٤٣	٣.٦٦٥	٣.٦٨٦	٣.٧٠٨	٣.٧٢٩	٣.٧٤٩	٣.٧٧٠	٣.٧٩٠	٣.٨١٠	٣.٨٣٠
١.٢	٣.٨٤٩	٣.٨٦٩	٣.٨٨٨	٣.٩٠٧	٣.٩٢٥	٣.٩٤٤	٣.٩٦٢	٣.٩٨٠	٣.٩٩٧	٤.٠١٥
١.٣	٤.٠٣٢	٤.٠٤٩	٤.٠٦٦	٤.٠٨٢	٤.٠٩٩	٤.١١٥	٤.١٣١	٤.١٤٧	٤.١٦٢	٤.١٧٧
١.٤	٤.١٩٢	٤.٢٠٧	٤.٢٢٢	٤.٢٣٦	٤.٢٥١	٤.٢٦٥	٤.٢٧٩	٤.٢٩٢	٤.٣٠٦	٤.٣١٩
١.٥	٤.٣٣٢	٤.٣٤٥	٤.٣٥٧	٤.٣٧٠	٤.٣٨٢	٤.٣٩٤	٤.٤٠٦	٤.٤١٨	٤.٤٢٩	٤.٤٤١
١.٦	٤.٤٥٢	٤.٤٦٣	٤.٤٧٤	٤.٤٨٤	٤.٤٩٥	٤.٥٠٥	٤.٥١٥	٤.٥٢٥	٤.٥٣٥	٤.٥٤٥
١.٧	٤.٥٥٤	٤.٥٦٤	٤.٥٧٣	٤.٥٨٢	٤.٥٩١	٤.٥٩٩	٤.٦٠٨	٤.٦١٦	٤.٦٢٥	٤.٦٣٣
١.٨	٤.٦٤١	٤.٦٤٩	٤.٦٥٦	٤.٦٦٤	٤.٦٧١	٤.٦٧٨	٤.٦٨٦	٤.٦٩٣	٤.٦٩٩	٤.٧٠٦
١.٩	٤.٧٣١	٤.٧٣٦	٤.٧٣٦	٤.٧٣٢	٤.٧٣٨	٤.٧٤٤	٤.٧٥٠	٤.٧٥٦	٤.٧٦١	٤.٧٧٦
٢.٠	٤.٧٧٢	٤.٧٧٨	٤.٧٨٣	٤.٧٨٨	٤.٧٩٣	٤.٧٩٨	٤.٨٠٣	٤.٨٠٨	٤.٨١٢	٤.٨١٧

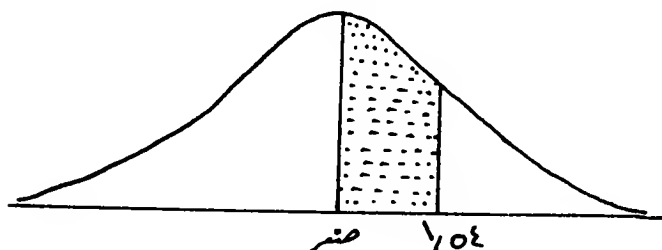
ص	صفر	٠.٠١	٠.٠٢	٠.٠٣	٠.٠٤	٠.٠٥	٠.٠٦	٠.٠٧	٠.٠٨	٠.٠٩
٢ر١	٤٨٢١ر	٤٨٢٦ر	٤٨٣٠ر	٤٨٣٤ر	٤٨٣٨ر	٤٨٤٢ر	٤٨٤٦ر	٤٨٥٠ر	٤٨٥٤ر	٤٨٥٧ر
٢ر٢	٤٨٦١ر	٤٨٦٤ر	٤٨٦٨ر	٤٨٧١ر	٤٨٧٥ر	٤٨٧٨ر	٤٨٨١ر	٤٨٨٤ر	٤٨٨١ر	٤٨٩٠ر
٢ر٣	٤٨٩٣ر	٤٨٩٦ر	٤٨٩٨ر	٤٩٠١ر	٤٩٠٤ر	٤٩٠٦ر	٤٩٠٩ر	٤٩١١ر	٤٩١٠ر	٤٩١٦ر
٢ر٤	٤٩١٨ر	٤٩٢٠ر	٤٩٢٢ر	٤٩٢٥ر	٤٩٢٧ر	٤٩٢٩ر	٤٩٣١ر	٤٩٣٢ر	٤٩٣٤ر	٤٩٣٦ر
٢ر٥	٤٩٣٨ر	٤٩٤٠ر	٤٩٤١ر	٤٩٤٣ر	٤٩٤٥ر	٤٩٤٦ر	٤٩٤٨ر	٤٩٤٩ر	٤٩٥١ر	٤٩٥٢ر
٢ر٦	٤٩٥٣ر	٤٩٥٥ر	٤٩٥٦ر	٤٩٥٧ر	٤٩٥٩ر	٤٩٦٠ر	٤٩٦١ر	٤٩٦٢ر	٤٩٦٣ر	٤٩٦٤ر
٢ر٧	٤٩٦٥ر	٤٩٦٦ر	٤٩٦٧ر	٤٩٦٨ر	٤٩٦٩ر	٤٩٧٠ر	٤٩٧١ر	٤٩٧٢ر	٤٩٧٣ر	٤٩٧٤ر
٢ر٨	٤٩٧٤ر	٤٩٧٥ر	٤٩٧٦ر	٤٩٧٧ر	٤٩٧٧ر	٤٩٧٨ر	٤٩٧٩ر	٤٩٧٩ر	٤٩٨٠ر	٤٩٨١ر
٢ر٩	٤٩٨١ر	٤٩٨٢ر	٤٩٨٢ر	٤٩٨٣ر	٤٩٨٤ر	٤٩٨٤ر	٤٩٨٥ر	٤٩٨٥ر	٤٩٨٦ر	٤٩٨٦ر
٣ر٠	٤٩٨٧ر	٤٩٨٧ر	٤٩٨٧ر	٤٩٨٨ر	٤٩٨٨ر	٤٩٨٩ر	٤٩٨٩ر	٤٩٨٩ر	٤٩٩٠ر	٤٩٩٠ر

مثال (٩): إذا كان ص متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي القياسي ( $\mu = ٥٠$ ،  $\sigma = ١$ ) فأوجد :

- (أ) ح (٠  $\geq$  ص  $\geq$  ١٥٤) (ب) ح (ص  $\leq$  ١٢٥) (ج) ح (١  $\geq$  ص  $\geq$  ٢) (د) ح (١٨  $\geq$  ص  $\geq$  صفر) (هـ) ح (ص  $\geq$  ١٢ - ١) (و) ح (٢ - ١  $\geq$  ص  $\geq$  ١ - ١) (ز) ح (١ - ١  $\geq$  ص  $\geq$  ١٢٨)

الحل

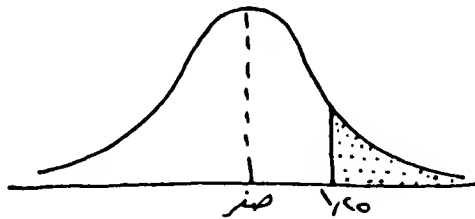
(أ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١٥٤ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب — المساحة المظلمة في الشكل.



ويمكن الحصول على هذه المساحة من الجدول مباشرة بالبحث عن القيمة التي تناظر ١.٥ في العمود الأول وأسفل ٠.٠٤.

$$\text{وعلى ذلك يكون } H(0 \leq V \leq 1.54) = 0.4382$$

(ب) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١.٢٥ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب — المساحة المظلمة في الشكل.



ونلاحظ أن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي:

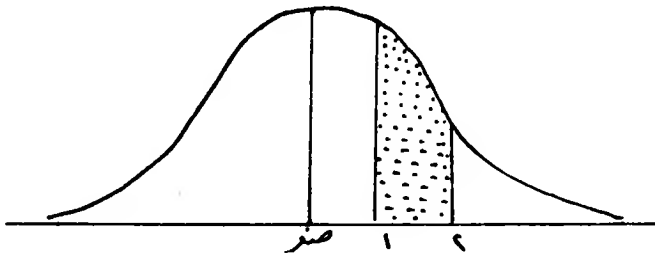
$$H(V \leq 1.25) = 0.8944 - 0.5 = H(0 \leq V \leq 1.25)$$

والجدول يعطي قيمة  $H(0 \leq V \leq 1.25)$  مباشرة وبالتعويض بقيمتها نحصل على المطلوب، أي أن:

$$H(V \leq 1.25) = 0.8944 - 0.5 =$$

$$= 0.3944$$

(ج) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط ١، ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب هو المساحة المظلمة.



ولكن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة، ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي:

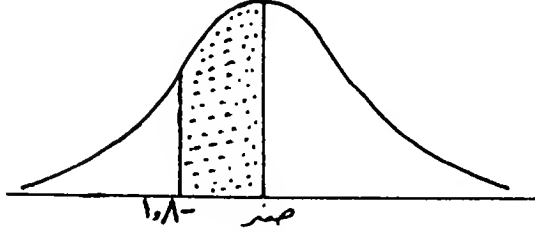
$$H(1 < V < 2) = H(0 \leq V \leq 2) - H(0 \leq V \leq 1)$$

(من الجدول مباشرة)

$$= ٠.٣٤١٣ - ٠.٤٧٧٢$$

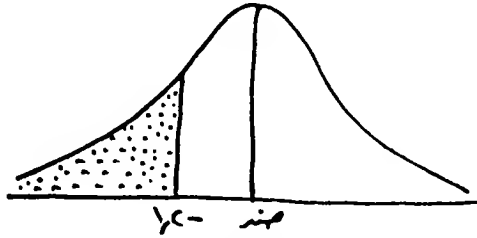
$$= ٠.١٣٥٩$$

(د) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة — ١.٨ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب — المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى فإن ح ( — )  
 $١.٨ \geq \text{ص} \geq \text{صفر}$  = ح (صفر  $\leq$  ص  $\leq$  ١.٨)  
 = ٠.٤٦٤١ من الجدول مباشرة

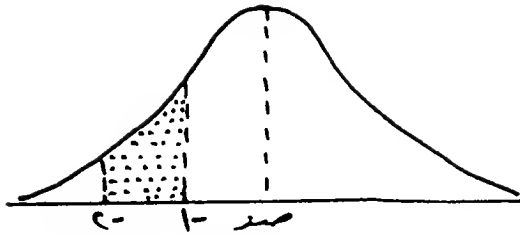
(هـ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة — ١.٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب — المساحة المظللة في الشكل



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى .

$$\begin{aligned} \text{ح (ص} \geq 1.2) &= \text{ح (ص} \leq 1.2) \\ &= ٥٠ - \text{ح ( صفر} \geq \text{ص} \geq 1.2) \\ &= ٥٠ - ٠.٣٨٤٩ = \text{ح ( من الجدول مباشرة )} \\ &= ٠.١١٥١ \end{aligned}$$

(و) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط — ١ ، — ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب — المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى فإن

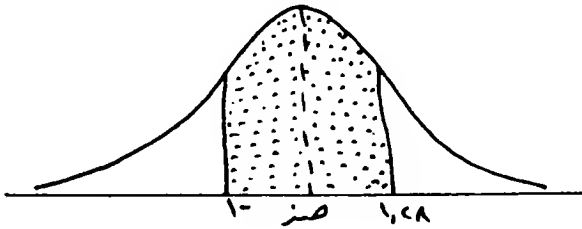
$$ح (٢ - \geq ص \geq ١) = ح (١ - \geq ص \geq ٠)$$

$$ح (١ - \geq ص \geq ٠) - ح (٢ - \geq ص \geq ٠) =$$

$$٠.٤٧٧٢ - ٠.٣٤١٣ =$$

$$٠.١٣٥٩ =$$

(ز) (نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط - ١، ١.٢٨ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظلة في الشكل .



وهذه المساحة تساوي ح (١ - \geq ص \geq صفر) + ح (صفر \geq ص \geq ١.٢٨)

$$ح (صفر \geq ص \geq ١) + ح (صفر \geq ص \geq ١.٢٨) =$$

$$٠.٣٩٩٧ + ٠.٣٤١٣ =$$

$$٠.٧٤١٠ =$$

(٧-٣) - حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي :

إذا كانت س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  وأردنا حساب أي احتمال حول المتغير س، فإننا نحوله أولا إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع  $ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$  حيث أن الجداول التي تعطي المساحة هي الجداول الخاصة بالتوزيع القياسي فقط. فلحساب  $(١ \geq ص \geq ٢)$  مثلا فإن هذا الاحتمال يساوي



$$c. \left( \frac{\mu - \sigma}{\sigma} \geq v \geq \frac{\mu - i}{\sigma} \right)$$

والأمثلة الآتية توضح طريقة الحل:

مثال (١٠): إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم. اخترنا عشوائيا أحد الطلبة، ما احتمال أن يكون طوله:

(أ) أكبر من ١٨٤ سم.

(ب) أقل من ١٥٦ سم.

(ج) ينحصر بين ١٦٥، ١٧٤ سم.

الحل

بفرض أن  $s$  ترمز لأطوال الطلاب

$s$  تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم

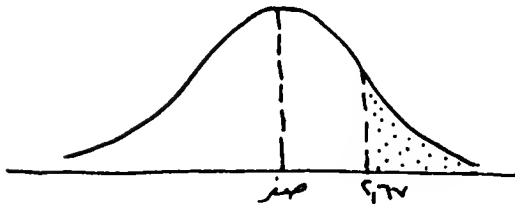
$$\text{وبوضع } v = \frac{168 - s}{6}$$

∴  $s$  تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا:

(أ)  $H(s \leq 184)$ :

عندما  $s = 184$  فإن

$$\therefore v = \frac{168 - 184}{6} = \frac{-16}{6} = -2.67$$



وعلى ذلك:

$$\therefore H(s \leq 184) = H(v \leq -2.67)$$

$$= 1 - H(v \geq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

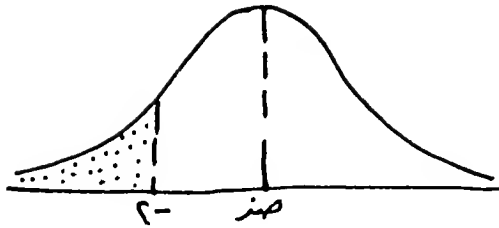
$$= 0.5 - 0.0099 = 0.4901$$

$$= 0.4901$$

$$(ب) ح (س \geq 106) :$$

عندما س = 106 فان

$$ص = \frac{12 - 106}{6} = \frac{168 - 106}{6} = 2 -$$



وعلى ذلك :

$$ح (س \geq 106) = ح (ص \geq 2 -)$$

$$= ٥ر - ح (٠ \geq ص \geq 2)$$

$$= ٥ر - ٤٧٧٢ر٠$$

$$= ٢٢٨ر٠$$

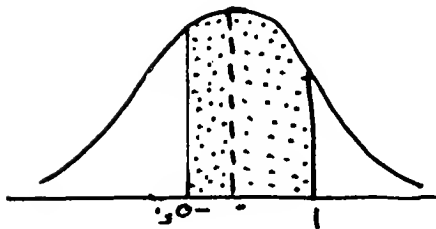
$$(ج) ح (165 \leq س \leq 174) :$$

عندما س = 165 فان

$$ص = \frac{3 - 165}{6} = \frac{168 - 165}{6} = ٥ر -$$

، عندما س = 174 فان

$$\therefore ص = \frac{168 - 174}{6} = 1 -$$



وعلى ذلك :

$$\begin{aligned} \text{ح ( ١٦٥ } \geq \text{ س } \geq \text{ ١٧٤ )} &= \text{ح ( - ٥٠ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١ )} \\ \text{ح ( - ٥٠ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ٠ صفر )} &+ \text{ح ( ٠ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١ )} \\ \text{ح ( صفر } \geq \text{ ص } \geq \text{ ٠.٥ )} &+ \text{ح ( ٠ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١ )} \\ &= ٣٤١٣ \text{ ر} + ١٩١٥ \text{ ر} \\ &= ٥٣٢٨ \text{ ر.} \end{aligned}$$

مثال (١١) : إذا كان دخل ٨٠٠ أسرة في مدينة جدة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٨٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال . فأوجد :

- (أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال .
- (ب) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٢٤٠٠ ريال .
- (ج) احتمال الحصول على دخل ينحصر بين ١٦٥٠ ، ٢٢٥٠ ريالا .
- (د) احتمال الحصول على دخل يقل عن ١٢٠٠ ريال .
- (هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال .

### الحل

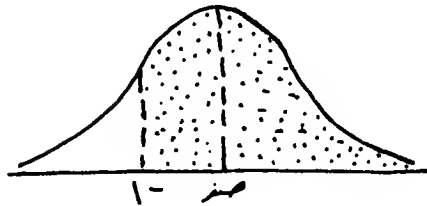
بفرض أن س ترمز لدخول الأسر .

س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٨٠٠ ريالا وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال .  
وبوضع  $\text{ص} = \frac{\text{س} - ١٨٠٠}{٣٠٠}$  فإن ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا .

$$\therefore \text{ح ( ١ )} = \text{ح ( س } \leq \text{ ١٥٠٠ )} .$$

عندما  $\text{س} = ١٥٠٠$  فإن

$$\text{ص} = \frac{١٥٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = \frac{-٣٠٠}{٣٠٠} = -١$$



$$\therefore H (S \leq 1500) = H (V \leq 1) =$$

$$= 0.8413 + (1 - 0.8413) = 0.1587$$

$$= 0.1587$$

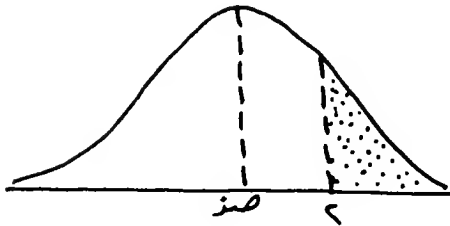
$$= 0.1587$$

$$= 0.1587$$

$$(b) H (S \leq 2400) :$$

عندما  $S = 2400$  فان

$$V = \frac{1800 - 2400}{300} = -2$$



$$\therefore H (S \leq 2400) = H (V \leq -2) =$$

$$= 0.0540 + (1 - 0.0540) = 0.9460$$

$$= 0.9460$$

$$= 0.9460$$

$$(c) H (1650 \leq S \leq 2250) :$$

عندما  $S = 1650$  فان

$$V = \frac{1800 - 1650}{300} = 0.5$$

وعندما  $S = 2250$  فان

$$V = \frac{1800 - 2250}{300} = -1.5$$

$$\therefore H (1650 \leq S \leq 2250) = H (-1.5 \leq V \leq 0.5) =$$

$$ح = ( - ٥٠ \geq ص \geq \text{صفر} )$$

$$ح + ( ٠ \geq ص \geq ١٥٠ )$$

$$ح = ( \text{صفر} \geq ص \geq ٥٠ )$$

$$ح + ( ٠ \geq ص \geq ١٥٠ )$$

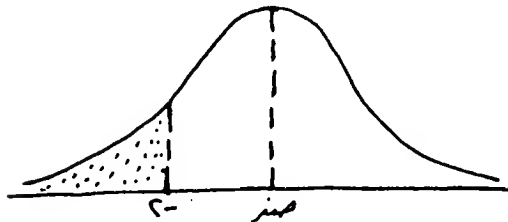
$$= ١٩١٥ \text{ ار} + ٤٣٣٢ \text{ ر}$$

$$= ٦٢٤٧ \text{ ر}$$

$$(د) ح ( س \geq ١٢٠٠ ) :$$

عندما س = ١٢٠٠ فان

$$ص = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = \frac{٦٠٠}{٣٠٠} = ٢ -$$



$$\therefore ح ( س \geq ١٢٠٠ ) = ح ( ص \geq ٢ - )$$

$$= ٠.٥ - ح ( - ٢ \geq ص \geq \text{صفر} )$$

$$= ٠.٥ - ح ( \text{صفر} \geq ص \geq ٢ )$$

$$= ٠.٥ - ٤٧٧٢ \text{ ر}$$

$$= ٠.٢٢٨ \text{ ر}$$

(هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال :

لايجاد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال ، نوجد احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال ونضربه في عدد الأسر فنحصل على المطلوب .

$$\text{وحيث أن } ح ( س \leq ١٥٠٠ ) = ٠.٨٤١٣$$

من المطلوب (١)

∴ عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال =  $٨٤١٣ \times ٨٠٠$

$$= ٦٧٣٠٠٤$$

$$= ٦٧٣ \text{ أسرة} \cdot$$

رابعا : توزيع ت :

(٣-٨) — مقدمة :

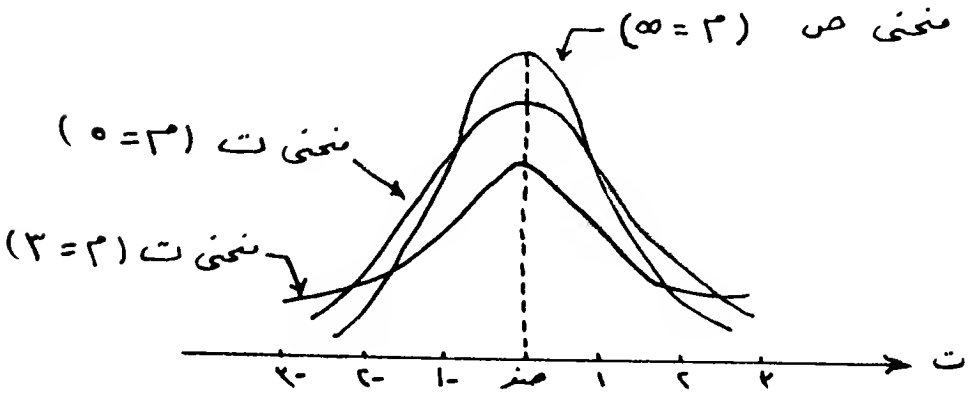
في الكثير من الدراسات الإحصائية وخاصة تلك المتعلقة بتحليل نتائج العينات الصغيرة تظهر الحاجة إلى استخدام توزيع احتمالي جديد يشبه في شكله إلى حد ما شكل التوزيع الطبيعي النبائي (ص) وإن كان يختلف عنه كثيرا . هذا التوزيع الجديد يسمى توزيع «ت» وهو من التوزيعات الاحتمالية المهمة الكثيرة الاستعمال في الدراسات الاحصائية . ويرجع الفضل في اشتقاق هذا التوزيع إلى العالم الأيرلندي و. س. جوسيت (W. S. Gosset) الذي نشر بحثا في عام ١٩٠٨م اشتق فيه الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع ونظرا لظروف خاصة لم ينشر البحث باسمه ولهذا تحايل على ذلك بنشره تحت اسم مستعار ورمز لهذا التوزيع بالرمز «ت — T» .

وكما سبق أن ذكرنا أن منحني توزيع «ت» مشابه إلى حد ما منحني التوزيع الطبيعي القياسي «ص» فكلاهما متماثل حول الصفر أي أن لهما نفس المتوسط وهو صفر كما أن كلاهما له شكل ناقوس وكلاهما يأخذ قيمة عددية تتراوح بين  $-\infty$  و  $+\infty$  ولكنهما يختلفان في بعض الخصائص — فمثلا تبين التوزيع الطبيعي القياسي مقدار ثابت و يساوي الواحد الصحيح ، بينما توزيع (ت) نجد أن تباينه يساوي  $\frac{3}{2}$  حيث أن مقدار ثابت يسمى درجات الحرية (وسوف نرى أن  $m = n - 1$  حيث أن «ن» هي حجم العينة وذلك عندما نتكلم عن تحليل العينات الصغيرة في الباب السادس) .

نلاحظ أن تبين توزيع (ت) دائما أكبر من الواحد الصحيح لأن البسط  $= m$  والمقام  $= m - 2$  فدائما البسط أكبر من المقام — لهذا فان منحني توزيع (ت) أكثر تشتتا من منحني التوزيع الطبيعي القياسي — وكلما كبرت  $m$  كلما اقترب منحني توزيع (ت) من المنحني الطبيعي القياسي حتى أنه عندما تصبح «م» كبيرة جدا (أي تقترب من  $\infty$ ) نجد أن منحني (ت) ينطبق تماما على المنحني الطبيعي القياسي .

مما سبق يتضح أن منحني (ت) يتغير تبعا لتغير الثابت «م» المسمى بدرجات الحرية — لهذا نجد أنه لكل قيمة من قيم «م» يوجد منحني معين للمتغير (ت) وفي الشكل التالي نرسم عدة منحنيات للمتغير (ت) عندما  $m = 3, 5, \infty$  أي  $m$  تؤول إلى  $\infty$  بالمقارنة مع منحني

المتغير الطبيعي القياسي «ص» وسنكتفي في هذه المرحلة بتقديم شكل منحنى توزيع (ت) دون تقديم صيغته الرياضية نظرا لصعوبتها في هذه المرحلة من الدراسة.



يتضح من الشكل السابق تماثل كل المنحنيات حول الصفر ولكن كلما كبرت «م» كلما زاد ارتفاع قمة المنحنى وأصبح أكثر تدبياً أي أقل تشتتاً، وفي النهاية عندما تصبح  $(\infty = م)$  ينطبق المنحنى على منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (ص).

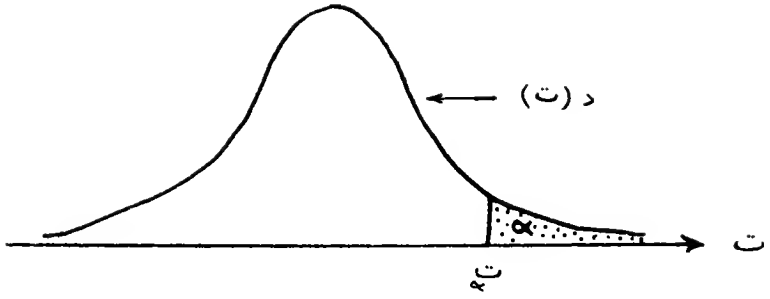
### (٩-٣) - استخدام جداول توزيع «ت»:

لحساب أي احتمالات حول المتغير «ت» يلزمنا وجود جدول بين المساحات المختلفة تحت منحنى الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع د (ت) والمحصورة بين أي قيمتين من قيم المتغير «ت» كما هو الحال في جداول التوزيع الطبيعي القياسي، ولكن كما نعلم فإنه لكل قيمة من قيم (م) يوجد منحنى للدالة د (ت). وهذا يعني أنه يلزمنا جدول خاص بكل قيمة من قيم (م) وهذه عملية صعبة طويلة وحيث أن الاستخدامات الإحصائية لتوزيع (ت) تعتمد على معرفة قيم المتغير (ت) التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها  $\alpha$  فيكون المطلوب هو معرفة قيمة (ت) بحيث يكون:

$$\alpha = P(T < t)$$

وهذا ينص على أن:

احتمال أن المتغير العشوائي (ت) أكبر من القيمة (ت) يساوي  $\alpha$  كما هو مبين في الشكل الآتي:



وتصبح المسألة هي إيجاد قيم  $(ت_٠)$  التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها «  $\alpha$  » وبهذه الطريقة يمكن عمل جدول واحد يعطي قيم  $(ت_٠)$  التي تناظر الاحتمال «  $\alpha$  » لدرجات الحرية المختلفة.

ولما كانت الاحتمالات الشائعة الاستخدام هي : -

$$(\alpha = 0.005, 0.001, 0.0025, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05)$$

$$0.05, 0.1, 0.25, 0.4)$$

لهذا فإن الجدول يعطي قيم  $(ت_٠)$  التي تقابل هذه الاحتمالات لكل درجات الحرية من ١ إلى ٢٩ وكذلك عندما  $\infty, 120, 60, 40, 30$  و يوضح رأس الجدول قيم  $(\alpha)$  المختلفة كما يوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول هي قيم  $(ت_٠)$ .



جدول توزیع (ت)

م	$\alpha = 0.05$	۰.۰۰۱	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۲۵	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۵	۰.۰۰۰۰۲۵	۰.۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۰۵	۰.۰۰۰۰۰۲۵	۰.۰۰۰۰۰۱
۱	۶۳۶٫۶۲	۳۱۸٫۳۱	۱۲۷٫۳۲	۶۳٫۶۵۷	۳۱٫۸۲۱	۱۲٫۷۰۶	۶٫۳۱۴	۳٫۰۷۸	۱٫۰۰۰	۰٫۳۲۵	۰٫۰۰۰
۲	۳۱۵٫۹۸	۲۲٫۳۲۶	۱۴٫۰۸۹	۹٫۹۲۵	۶٫۹۶۵	۴٫۳۰۳	۲٫۹۲۰	۱٫۸۸۶	۰٫۸۱۶	۰٫۲۸۹	۰٫۰۰۰
۳	۱۲٫۹۲۴	۱۰٫۲۱۳	۷٫۴۵۳	۵٫۸۴۱	۴٫۵۴۱	۳٫۱۸۲	۲٫۳۵۳	۱٫۶۳۸	۰٫۷۶۵	۰٫۲۷۷	۰٫۰۰۰
۴	۸٫۶۱۰	۷٫۱۷۳	۵٫۵۹۸	۴٫۶۰۴	۳٫۷۴۷	۲٫۷۷۶	۲٫۱۳۲	۱٫۵۳۳	۰٫۷۴۱	۰٫۲۷۱	۰٫۰۰۰
۵	۶٫۸۶۹	۵٫۸۹۳	۴٫۷۷۳	۴٫۰۳۲	۳٫۳۶۵	۲٫۵۷۱	۲٫۰۱۵	۱٫۴۷۶	۰٫۷۲۷	۰٫۲۶۷	۰٫۰۰۰
۶	۵٫۹۵۹	۵٫۲۰۸	۴٫۳۱۷	۳٫۷۰۷	۳٫۱۴۳	۲٫۴۴۷	۱٫۹۴۳	۱٫۴۴۰	۰٫۷۱۸	۰٫۲۶۵	۰٫۰۰۰
۷	۵٫۴۰۸	۴٫۷۸۵	۴٫۰۲۹	۳٫۴۹۹	۲٫۹۹۸	۲٫۳۶۵	۱٫۸۹۵	۱٫۴۰۵	۰٫۷۱۱	۰٫۲۶۳	۰٫۰۰۰
۸	۵٫۰۴۱	۴٫۵۰۱	۳٫۸۳۳	۳٫۳۵۵	۲٫۹۸۶	۲٫۳۰۶	۱٫۸۶۰	۱٫۳۹۷	۰٫۷۰۶	۰٫۲۶۲	۰٫۰۰۰
۹	۴٫۷۸۱	۴٫۲۹۷	۳٫۶۹۰	۳٫۲۵۰	۲٫۸۲۱	۲٫۲۶۲	۱٫۸۳۳	۱٫۳۸۳	۰٫۷۰۳	۰٫۲۶۱	۰٫۰۰۰
۱۰	۴٫۵۸۷	۴٫۱۴۴	۳٫۵۸۱	۳٫۱۶۹	۲٫۷۴۶	۲٫۲۲۸	۱٫۸۱۲	۱٫۳۷۲	۰٫۷۰۰	۰٫۲۶۰	۰٫۰۰۰
۱۱	۴٫۴۳۷	۴٫۰۲۵	۳٫۳۹۷	۳٫۱۰۶	۲٫۷۱۸	۲٫۲۰۱	۱٫۷۹۶	۱٫۳۶۳	۰٫۶۹۷	۰٫۲۶۰	۰٫۰۰۰
۱۲	۴٫۳۱۸	۳٫۹۳۰	۳٫۴۲۸	۳٫۰۵۵	۲٫۶۸۱	۲٫۱۷۹	۱٫۷۸۲	۱٫۳۵۶	۰٫۶۹۵	۰٫۲۵۹	۰٫۰۰۰
۱۳	۴٫۲۲۱	۳٫۸۵۲	۳٫۳۷۲	۳٫۰۱۲	۲٫۶۵۰	۲٫۱۶۰	۱٫۷۷۱	۱٫۳۵۰	۰٫۶۹۴	۰٫۲۵۹	۰٫۰۰۰
۱۴	۴٫۱۴۰	۳٫۷۸۷	۳٫۳۲۶	۲٫۹۷۷	۲٫۶۴۲	۲٫۱۴۵	۱٫۷۶۱	۱٫۳۴۵	۰٫۶۹۲	۰٫۲۵۸	۰٫۰۰۰
۱۵	۴٫۰۷۳	۳٫۷۳۳	۳٫۲۸۶	۲٫۹۴۷	۲٫۶۰۲	۲٫۱۳۱	۱٫۷۵۳	۱٫۳۴۱	۰٫۶۹۱	۰٫۲۵۸	۰٫۰۰۰
۱۶	۴٫۰۱۵	۳٫۶۸۶	۳٫۲۵۲	۲٫۹۲۱	۲٫۵۸۳	۲٫۱۲۰	۱٫۷۴۶	۱٫۳۳۷	۰٫۶۹۰	۰٫۲۵۸	۰٫۰۰۰
۱۷	۳٫۹۶۵	۳٫۶۴۶	۳٫۲۲۲	۲٫۸۹۸	۲٫۵۶۷	۲٫۱۱۰	۱٫۷۴۰	۱٫۳۳۳	۰٫۶۸۹	۰٫۲۵۷	۰٫۰۰۰
۱۸	۳٫۹۲۲	۳٫۶۱۰	۳٫۱۹۷	۲٫۸۷۸	۲٫۵۵۲	۲٫۱۰۱	۱٫۷۳۴	۱٫۳۳۰	۰٫۶۸۸	۰٫۲۵۷	۰٫۰۰۰
۱۹	۳٫۸۸۳	۳٫۵۷۹	۳٫۱۷۴	۲٫۸۶۱	۲٫۵۳۹	۲٫۰۹۳	۱٫۷۲۹	۱٫۳۲۸	۰٫۶۸۸	۰٫۲۵۷	۰٫۰۰۰

بقية جدول توزيع (ت)

م	٥٠ =	٠.٠٠١	٠.٠٠٢٥	٠.٠٠٥	٠.٠١	٠.٠٢٥	٠.٠٥	٠.١	٠.٢٥	٠.٤
٢٠	٢٣٨٥٠	٢٣٥٥٢	٢٣١٥٣	٢٢٨٤٥	٢٢٥٢٨	٢٢٠٨٦	٢١٧٢٥	٢١٣٢٥	٢٠٩٨٧	٢٠٦٥٧
٢١	٢٣٨١٩	٢٣٥٢٧	٢٣١٣٥	٢٢٨٣١	٢٢٥١٨	٢٢٠٨٠	٢١٧٢١	٢١٣٢٣	٢٠٩٨٦	٢٠٦٥٧
٢٢	٢٣٧٩٢	٢٣٥٠٥	٢٣١١٩	٢٢٨١٩	٢٢٥٠٨	٢٢٠٧٤	٢١٧١٧	٢١٣٢١	٢٠٩٨٦	٢٠٦٥٦
٢٣	٢٣٧٦٧	٢٣٤٨٥	٢٣١٠٤	٢٢٨٠٧	٢٢٥٠٠	٢٢٠٦٩	٢١٧١٤	٢١٣١٩	٢٠٩٨٥	٢٠٦٥٦
٢٤	٢٣٧٤٥	٢٣٤٦٧	٢٣٠٩١	٢٢٧٩٧	٢٢٤٩٢	٢٢٠٦٤	٢١٧١١	٢١٣١٨	٢٠٩٨٥	٢٠٦٥٦
٢٥	٢٣٧٢٥	٢٣٤٥٠	٢٣٠٧٨	٢٢٧٨٧	٢٢٤٨٥	٢٢٠٦٠	٢١٧٠٨	٢١٣١٦	٢٠٩٨٤	٢٠٦٥٦
٢٦	٢٣٧٠٧	٢٣٤٣٥	٢٣٠٦٧	٢٢٧٧٩	٢٢٤٧٩	٢٢٠٥٨	٢١٧٠٦	٢١٣١٥	٢٠٩٨٤	٢٠٦٥٦
٢٧	٢٣٦٩٠	٢٣٤٢١	٢٣٠٥٧	٢٢٧٧١	٢٢٤٧٣	٢٢٠٥٢	٢١٧٠٣	٢١٣١٤	٢٠٩٨٤	٢٠٦٥٦
٢٨	٢٣٦٧٤	٢٣٤٠٨	٢٣٠٤٧	٢٢٧٦٣	٢٢٤٦٧	٢٢٠٤٨	٢١٧٠١	٢١٣١٣	٢٠٩٨٣	٢٠٦٥٦
٢٩	٢٣٦٥٩	٢٣٣٩٦	٢٣٠٣٨	٢٢٧٥٦	٢٢٤٦٢	٢٢٠٤٥	٢١٦٩٩	٢١٣١١	٢٠٩٨٣	٢٠٦٥٦
٣٠	٢٣٦٤٦	٢٣٣٨٥	٢٣٠٣٠	٢٢٧٥٠	٢٢٤٥٧	٢٢٠٤٢	٢١٦٩٧	٢١٣١٠	٢٠٩٨٣	٢٠٦٥٦
٤٠	٢٣٥٥١	٢٣٣٠٧	٢٢٩٧١	٢٢٧٠٤	٢٢٤٢٣	٢٢٠٢١	٢١٦٨٤	٢١٣٠٣	٢٠٩٨١	٢٠٦٥٥
٦٠	٢٣٤٦٠	٢٣٢٣٢	٢٢٩١٥	٢٢٦٦٠	٢٢٣٩٠	٢٢٠٠٠	٢١٦٧١	٢١٢٩٦	٢٠٩٧٩	٢٠٦٥٤
١٢٠	٢٣٣٧٣	٢٣١٦٠	٢٢٨٦٠	٢٢٦١٧	٢٢٣٥٨	٢١٩٨٠	٢١٦٥٨	٢١٢٨٩	٢٠٩٧٧	٢٠٦٥٤
٥٠٠	٢٣٢٩١	٢٣٠٩٠	٢٢٨٠٧	٢٢٥٧٦	٢٢٣٢٦	٢١٩٦٠	٢١٦٤٥	٢١٢٨٢	٢٠٩٧٤	٢٠٦٥٣

فيما يلي نعطى بعض الأمثلة التي توضح كيفية استخدام الجدول :

مثال (١٢) : أوجد ما يلي :

١- قيمة  $t$  التي تجعل  $H(t) = 0.25$  علما بأن درجات الحرية  $m = 10$

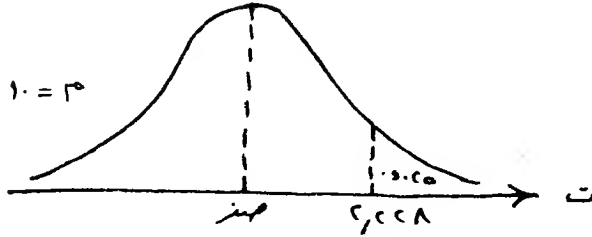
٢-  $H(t) = 0.975$   $t \geq t_{0.05}$

٣- قيمة  $t$  التي تجعل  $H(t) = 0.45$   $t \geq t_{0.05}$

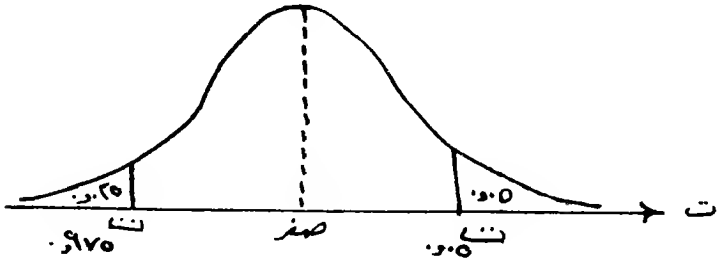
## الحل

١- بالبحث في جدول ت عند درجات الحرية  $m=10$  وأسفل الاحتمال  $\alpha=0.025$  نجد أن قيمة ت من الجدول هي ٢٢٢٨ وعلى هذا نجد أن:

$$t_{0.025} = 2228$$



٢- برسم د (ت) وتحديد النقطتين  $t_{0.975}$  ،  $t_{0.025}$  لتحديد المساحة المطلوبة.



من الرسم يتضح أن المساحة يسار النقطة  $t_{0.975}$  هي  $0.025$  والمساحة يمين النقطة  $t_{0.025}$  هي  $0.025$  إذن المساحة المحصورة بينهما هي باقي المساحة الكلية أي تساوي:

$$1 - (0.025 + 0.025) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\therefore \text{ح (ت)} \geq t_{0.975} \geq t_{0.025} = 0.95$$

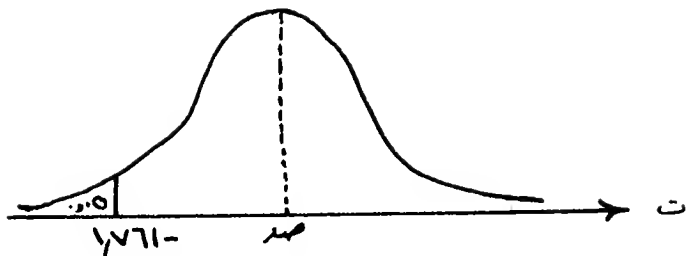
وهذه صحيحة لجميع درجات الحرية.

٣- بالبحث داخل جدول ت عن القيمة ١٧٦١ أمام درجات الحرية  $m=14$  نجد هذا الرقم أسفل الاحتمال  $\alpha=0.05$ .

$$\therefore \text{ح (ت)} < 1761 = 0.05$$

ومن خاصية تماثل منحنى الدالة د (ت) نجد أن المساحة على يسار النقطة — ١٧٦١ تساوي

كذلك  $0.05$ .

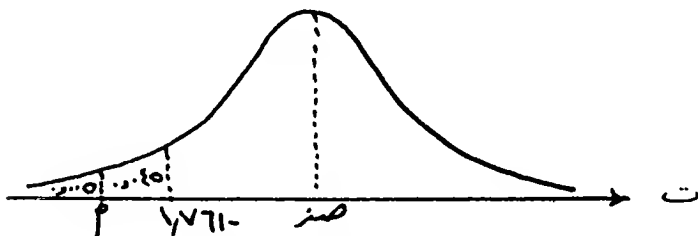


وبما أن ح ( ١ ≥ ت ≥ ١,٧٦١ - ) = ٠,٠٤٥

إذن قيمة أ تقع على يسار النقطة ( - ١,٧٦١ ) والمساحة بينهما ٠,٠٤٥

ولكن المساحة يسار النقطة ( - ١,٧٦١ ) تساوي ٠,٠٥

إذن المساحة يسار النقطة أ تساوي ٠,٠٥ - ٠,٠٤٥ = ٠,٠٠٥ ويتضح ذلك من الرسم التالي :



من التماثل توجد نقطة تناظر أ تماماً ولكن في الجانب الموجب من محورت وتكون المساحة يمين هذه النقطة تساوي ٠,٠٠٥ وهذه النقطة تساوي أ في القيمة العددية وتختلف عنها في الإشارة — وبالبحث في جدول ت أمام درجات الحرية م = ١٤ وأسفل الاحتمال  $\alpha = ٠,٠٠٥$  ونجد أن هذه النقطة هي ٢,٩٧٧ وبما أن هذه النقطة تساوي أ عددياً وتختلف عنها في الإشارة فتكون قيمة أ = - ٢,٩٧٧.

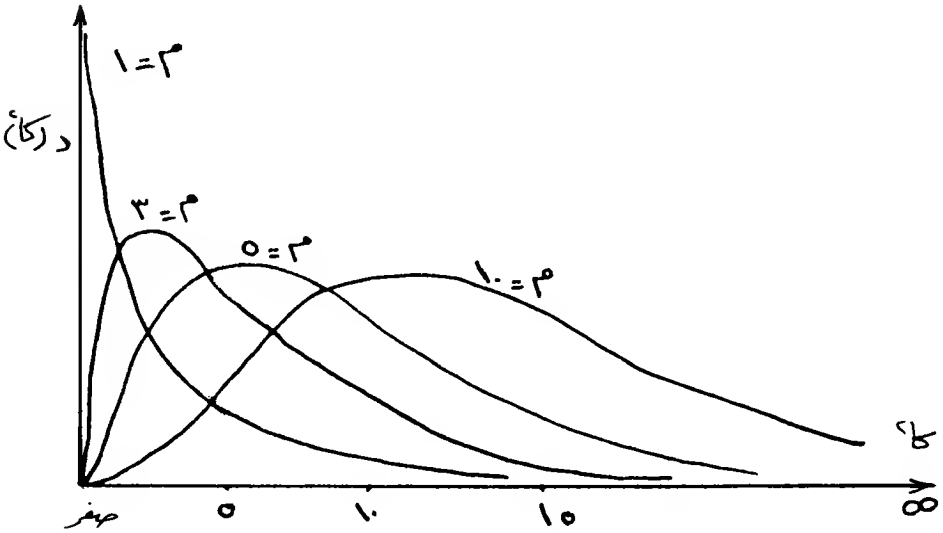
إذن ح ( ٢,٩٧٧ ≤ ت ≤ ١,٧٦١ - ) = ٠,٠٤٥

خامساً: توزيع كا<sup>٢</sup> :

(٣-١٠) — مقدمة :

يعتبر التوزيع الذي نحن بصدد دراسته الآن والذي نرمز له بالرمز كا<sup>٢</sup> من التوزيعات الاحتمالية المهمة التي نحتاج إليها في الكثير من الدراسات الإحصائية، ولن نتناول بالدراسة الصيغة الرياضية لهذا التوزيع د (كا<sup>٢</sup>) ولكن سنكتفي بفهم طبيعته وشكل هذا التوزيع وذلك برسم المنحنى الذي يمثله وكذلك سنوضح كيفية حساب الاحتمالات أي استخراج المساحات أسفل منحنى هذا التوزيع وذلك باستخدام جدول رياضي خاص يسمى بجدول كا<sup>٢</sup>.

ومنحنى هذا التوزيع يختلف عن منحنى التوزيع الطبيعي ومنحنى توزيع (ت) في أنه غير متماثل حول محور معين كما أنه لا يأخذ قيمة سالبة وإنما كل قيمة موجبة وتبدأ من الصفر حتى ما لا نهاية. وهذا يعني أن مفردات  $\chi^2$  تقع في الفترة صف  $\chi^2 \geq 0$  ، كما أن هذا التوزيع يعتمد في تغييره على مقدار ثابت (م) يسمى بدرجات الحرية (كما هو الحال في توزيع «ت») وبالتالي كلما تغيرت قيمة (م) كلما تغير شكل منحنى التوزيع — فكلما صغرت درجات الحرية (م) كلما قل التواء التوزيع. والشكل التالي يوضح عدة منحنيات لدالة المتغير العشوائي  $\chi^2$  أي للدالة د (  $\chi^2$  ) عندما تكون م = 1 ، م = 3 ، م = 5 ، م = 10 .



(٣-١١) — جدول توزيع  $\chi^2$  واستخدامه :

لقد أمكن عمل جدول يوضح قيم  $\chi^2$  المختلفة ودرجات الحرية ابتداء من م = 1 حتى م = ٢٩ وكذلك عندما م = ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٠٠ . ويوضح رأس الجدول قيم (  $\infty$  ) المختلفة وهي تمثل الاحتمالات الشائعة الاستخدام في توزيع  $\chi^2$  وهي الاحتمالات التالية :

$$\infty = 0.001, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999$$

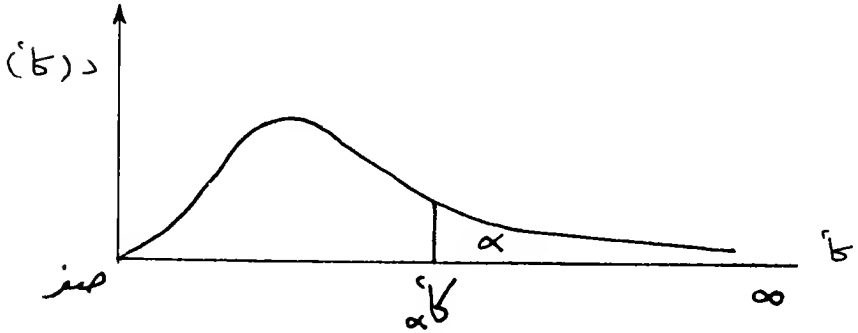
والاحتمالات  $\infty$  التي يوضحها الجدول هي المساحات أسفل منحنى الدالة د (  $\chi^2$  ) وحيث أن

الاستخدامات الإحصائية لتوزيع  $\chi^2$  تعتمد على معرفة قيم « $\chi^2$ » التي تحصر على يمينها احتمالات معينة قدرها  $\alpha$  فيكون المطلوب هو معرفة قيمة « $\chi^2$ » التي تحقق الاحتمال التالي:

$$\alpha = P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha})$$

وذلك عند درجة حرية معينة (م).

ويمكن تمثيل المساحة المناظرة لهذا الاحتمال على منحنى  $\chi^2$  كما في الشكل التالي:



$$\alpha = P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha})$$

وجداول  $\chi^2$  يتكون من صفوف وأعمدة — يوضح الصف الأول قيم  $\alpha$  المختلفة ويوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول فهي قيم « $\chi^2_{\alpha}$ ». فمثلاً لمعرفة قيمة  $\chi^2$  التي تحصر على يمينها احتمالاً قدره (٠.٠١) إذا كانت درجات الحرية ١٥ درجة فإننا نبحث في الجدول عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود  $\alpha = ٠.٠١$  رسنجد أن قيمة  $\chi^2 = ٣٠.٥٧٧٩$ .

وفيما يلي نقدم جدول توزيع  $\chi^2$ :

## جدول توزیع کا

۰۲۵۰	۰۱۰۰	۰۰۵۰	۰۰۲۵	۰۰۱۰	۰۰۰۵	۰۰۰۱	α/μ
۱۲۲۲۳۰	۲۷۰۵۵۴	۳۸۴۱۴۶	۵۰۲۳۸۹	۶۲۳۴۹۰	۷۸۷۹۴۴	۱۰۸۲۸	۱
۲۷۷۲۵۹	۴۶۰۵۱۷	۵۹۹۱۴۷	۷۳۷۷۷۶	۹۲۱۰۳۴	۱۰۵۹۶۶۰	۱۳۸۱۶	۲
۴۱۰۸۳۵	۶۲۵۱۳۹	۷۸۱۴۷۳	۹۳۴۸۴+	۱۱۳۴۴۹۰	۱۲۸۲۸۱۰	۱۶۲۶۶	۳
۵۳۸۵۲۷	۷۷۷۹۴۴	۹۴۸۷۷۳	۱۱۱۴۳۳۰	۱۳۲۷۶۷۰	۱۴۸۶۰۲۰	۱۸۴۶۷	۴
۶۲۲۵۶۸	۹۲۲۶۳۵	۱۱۰۷۰۵	۱۲۸۳۲۵	۱۵۰۸۶۳	۱۶۷۴۹۶	۲۰۵۱۵	۵
۷۸۴۰۸۰	۱۰۶۴۴۶	۱۲۵۹۱۶	۱۴۴۴۹۴	۱۶۸۱۱۹	۱۸۵۴۷۶	۲۲۴۵۸	۶
۹۰۳۷۱۵	۱۲۰۱۷۰	۱۶۰۶۷۱	۱۶۰۱۲۸	۱۸۴۷۵۳	۲۰۲۷۷۷	۲۴۳۲۲	۷
۱۰۲۱۸۸	۱۳۳۶۱۶	۱۵۵۰۷۳	۱۷۵۳۴۶	۲۰۰۹۰۲	۲۱۹۵۵۰	۲۶۱۲۵	۸
۱۱۳۸۸۷	۱۴۶۸۳۷	۱۶۹۱۹۰	۱۹۰۲۲۸	۲۱۶۶۶۰	۲۳۵۸۹۳	۲۷۸۷۷	۹
۱۲۵۴۸۹	۱۵۹۸۷۱	۱۸۳۰۷۰	۲۰۴۸۳۱	۲۳۲۰۹۳	۲۵۱۸۸۲	۲۹۵۸۸	۱۰
۱۳۷۰۰۷	۱۷۲۷۵۰	۱۹۶۷۵۱	۲۱۹۲۰۰	۲۴۷۲۵۰	۲۶۷۵۶۹	۳۱۲۶۴	۱۱
۱۴۸۴۵۴	۱۸۵۴۹۴	۲۱۰۲۶۱	۲۳۳۳۶۷	۲۶۲۱۷۰	۲۸۲۹۹۵	۳۲۹۰۹	۱۲
۱۵۹۸۳۹	۱۹۸۱۱۹	۲۲۳۶۲۱	۲۴۷۳۵۶	۲۷۶۸۸۳	۲۹۸۱۹۴	۳۴۵۲۸	۱۳
۱۷۱۱۷۰	۲۱۰۶۴۲	۲۳۶۸۴۸	۲۶۱۱۹۰	۲۹۱۴۱۳	۳۱۳۱۹۳	۳۶۱۲۳	۱۴
۱۸۲۴۵۱	۲۲۳۰۷۲	۲۴۹۹۵۸	۲۷۴۸۸۴	۳۰۵۷۷۹	۳۲۸۰۱۳	۳۷۶۹۷	۱۵
۲۹۳۶۸۸	۲۳۵۴۱۸	۲۶۲۹۶۲	۲۸۸۴۵۴	۳۱۹۹۹۹	۳۴۲۶۷۲	۳۹۲۵۲	۱۶
۲۰۴۸۸۷	۲۴۷۶۹۰	۲۷۵۸۷۱	۳۰۱۹۱۰	۳۳۴۰۸۷	۳۵۷۱۸۵	۴۰۷۹۰	۱۷
۲۱۶۰۴۹	۲۵۹۸۹۴	۲۸۸۶۹۳	۳۱۵۲۶۴	۳۴۸۰۵۳	۳۷۱۵۶۴	۴۲۳۱۲	۱۸
۲۲۷۱۷۸	۲۳۲۰۳۶	۳۰۱۴۳۵	۳۲۸۵۲۳	۳۶۱۹۰۸	۳۸۵۸۲۲	۴۳۸۲۰	۱۹

## تابع جدول توزيع كا ٢

م	٥٠٠٠٠	٧٥٠٠٠	٩٠٠٠٠	٩٥٠٠٠	٩٧٥٠٠	٩٩٠٠٠	٩٩٥٠٠
١	٠٠٠٤٥٤٩٣٧	٠٠٠١٠٥٣٠٨	٠٠٠١٥٧٩٠٨	٨٢٠٨٢٩٣٢١٤	٩٢٠٨٩٨٢٠٦٩	٩٢٠٨١٥٧٠٨٨	١٠٢٠٨٢٩٣٧٠٤
٢	١٢٣٨٦٢٩	٠٠٠٥٧٥٣٦٤	٠٠٠٢١٠٧٢٠	٠١٠٢٥٨٧	٠٠٠٥٠٦٣٥٦	٠٠٠٢٠١٠٠٧	٠١٠٠٢٤١
٣	٢٢٣٦٥٩٧	١٢٢١٢٥٣٤	٠٥٨٤٣٧٥	٠٢٥١٨٤٦	٠٢١٥٧٩٥	٠١١٤٨٣٢	٠٧١٧٢١٢
٤	٢٢٣٥٦٧٠	١٩٢٢٥٥	١٠٦٣٦٢٣	٠٧١٠٧٢١	٠٤٨٤٤١٩	٠٢٩٧١١٠	٠٢٠٦٩٩٠
٥	١٢٣٥١٤٦	٢٢٦٧٤٦٠	٢٢٦١٠٢١	١٢٤٥٤٧٦	٠٨٢١٢١١	٠٥٥٤٣٠٠	٠٤١١٧٤٠
٦	٥٢٣٤٨١٢	٢٤٥٤٦٠	٢٢٠٤١٣	١٢٣٥٣٩	١٢٢٣٧٣٤٧	٠٨٧٢٠٨٥	٠٦٧٥٧٢٧
٧	٦٢٣٤٥٨١	٤٢٥٤٨٥	٢٨٢٣١١	٢١٦٧٣٥	١٢٦٨٩٨٧	١٢٢٣٩٠٤٣	٠٩٨٩٢٦٥
٨	٧٢٣٤٤١٢	٥٢٠٧٠٦٤	٢٤٨٩٥٠٤	٢٧٢٢٦٤	٢١٧٩٧٣	١٢٤٦٤٨٢	١٢٤٤٤١٩
٩	٨٢٣٤٢٨٣	٥٨٩٨٨٢	٤١٦٨١٦	٢٣٢٥١١	٢٧٠٠٣٩	٢٠٨٧٩٠٢	١٧٢٤٩٢٦
١٠	٩٢٣٤١٨٢	٦٢٧٢٧٢٠	٤٨٦٥١٨	٢٩٤٠٣٠	٢٢٤٦٩٧	٢٥٥٨٢١	٢١٥٥٨٥
١١	١٠٢٣٤١٠	٧٥٥٨٤١٢	٥٥٧٧٧٩	٤٥٧٤٨١	٢٨١٥٧٥	٢٠٥٣٤٧	٢٦٠٣٢١
١٢	١١٢٣٤٠٣	٨٤٢٣٨٤٢	٦٣٠٣٨٠	٥٢٢٦٠٣	٤٤٠٣٧٩	٢٥٧٠٥٦	٢٠٧٢٨٢
١٣	١٢٢٣٣٩٨	٩٢٢٩٩٠٦	٧٢٠٤١٥٠	٥٨٩١٨٦	٥٠٠٨٧٤	٤١٠٦٩١	٢٥٦٥٠٣
١٤	١٢٢٣٢٩٢	١٠٢١٦٥٢	٧٧٨٩٥٢	٦٥٧٠٦٢	٥٦٢٨٧٢	٤٦٦٠٤٣	٤٢٠٧٤٦٨
١٥	١٤٢٣٢٨٩	١١٢٠٣٦٥	٨٥٤٦٧٥	٧٢٦٠٩٤	٦٢٢٦٢١٤	٥٢٢٩٣٥	٤٦٠٠٩٤
١٦	١٥٢٣٢٨٥	١١٩١٢٢	٩٣١٢٢٣	٧٩٦١٦٤	٦٩٠٧٦٦	٥٨١٢٢١	٥١٤٢٢٤
١٧	١٦٢٣٢٨١	١٢٧٩١٩	١٠٢٠٨٥٢	٨٦٧١٧٦	٧٥٦٤١٨	٦٤٠٧٧٦	٥٦٩٧٢٤
١٨	١٧٢٣٢٧٩	١٣٦٧٥٢	١٠٨٦٤٩	٩٢٩٠٤٦	٨٢٢٠٧٥	٧٢٠١٤٩١	٦٢٦٤٨١
١٩	١٨٢٣٢٧٦	١٤٥٦٢٠	١١٦٥٠٩	١٠١١٧٠	٨٩٠٦٥٥	٧٢٢٢٧٢	٦٨٤٢٩٨



## تابع جدول توزيع كا

٢٥٠ر٠	١٠٠ر٠	٥٠ر٠	٢٥ر٠	١٠ر٠	٥ر٠	١ر٠	٢
٢٣ر٨٢٧٧	٢٨ر٤١٢٠	٣١ر٤١٠٤	٣٤ر١٦٩٦	٣٧ر٥٦٦٢	٣٩ر٩٩٦٨	٤٥ر٣١٥	٢٠
٢٤ر٩٣٤٨	٢٩ر٦١٥١	٣٢ر٦٧٠٥	٣٥ر٤٧٨٩	٣٨ر٩٣٢١	٤١ر٤٠١٠	٤٦ر٧٩٧	٢١
٢٦ر٠٣٩٣	٣٠ر٨١٢٣	٢٣ر٩٢٤٤	٢٦ر٧٨٠٧	٤٠ر٢٨٩٤	٤٢ر٧٩٥٦	٤٨ر٢٦٨	٢٢
٢٧ر١٤١٣	٣٢ر٠٠٦٩	٣٥ر١٧٢٥	٣٨ر٠٧٥٧	٤١ر٦٣٨٤	٤٤ر١٨١٣	٤٩ر٧٢٨	٢٣
٢٨ر٢٤١٣	٣٣ر١٩٦٣	٣٦ر٤١٥١	٣٩ر٣٦٤١	٤٢ر٩٧٩٨	٤٥ر٥٥٨٥	٥١ر١٧٩	٢٤
٢٩ر٣٣٨٩	٣٤ر٣٨١٦	٣٧ر٦٥٢٥	٤٠ر٦٤٦٥	٤٤ر٣١٤١	٤٦ر٩٢٧٨	٥٢ر٦٢٠	٢٥
٣٠ر٤٣٤٥	٣٥ر٥٦٣١	٣٨ر٨٨٥٢	٤١ر٩٢٣٢	٤٥ر٦٤١٧	٤٨ر٢٨٩٩	٥٤ر٠٥٢	٢٦
٣١ر٥٢٨٤	٣٦ر٧٤١٢	٤٠ر١١٢٣	٤٣ر١٩٤٤	٤٦ر٩٦٣٠	٤٩ر٦٤٤٩	٥٥ر٤٧٦	٢٧
٣٢ر٦٢٠٥	٣٧ر٩١٥٩	٤١ر٣٣٧٢	٤٤ر٤٦٠٧	٤٨ر٢٧٨٢	٥٠ر٩٩٣٣	٥٦ر٨٩٢	٢٨
٣٣ر٧١٠٩	٣٩ر٠٨٧٥	٤٢ر٥٥٦٩	٤٥ر٧٢٢٢	٤٩ر٥٨٧٩	٥٢ر٣٣٥٦	٥٨ر٣٠٢	٢٩
٣٩ر٧٩٩٨	٤٠ر٢٥٦٠	٤٣ر٧٧٢٩	٤٦ر٩٧٩٢	٥٠ر٨٩٢٢	٥٣ر٦٣٢٠	٥٩ر٧٠٣	٣٠
٤٥ر٦١٦٠	٥١ر٨٠٥٠	٥٥ر٧٥٨٥	٥٩ر٣٤١٧	٦٣ر٦٩٠٧	٦٦ر٧٦٥٩	٧٣ر٤٠٢	٤٠
٥٦ر٢٣٣٦	٦٣ر١٦٧١	٦٧ر٥٠٤٨	٧١ر٤٢٠٢	٧٦ر١٥٣٩	٧٩ر٤٩٠٠	٨٦ر٦٦١	٥٠
٦٦ر٩٨١٤	٧٤ر٣٩٧٠	٧٩ر٠٨١٩	٨٣ر٢٩٧٦	٨٨ر٣٧٩٤	٩١ر٩٥١٧	٩٩ر٦٠٧	٦٠
٧٧ر٥٧٦٦	٨٥ر٥٢٧١	٩٠ر٥٣١٢	٩٥ر٠٢٣١	١٠٠ر٤٢٥	١٠٤ر٢١٥	١١٢ر٣١٧	٧٠
٨٨ر١٣٠٢	٩٦ر٥٧٨٢	١٠١ر٨٧٩	١٠٦ر٦٢٩	١١٢ر٣٢٩	١١٦ر٣٢١	١٢٤ر٨٣٩	٨٠
٩٨ر٦٤٩٩	١٠٧ر٥٦٥	١١٣ر١٤٥	١١٨ر١٣٦	١٢٤ر١١٦	١٢٨ر٢٩٩	١٣٧ر٢٠٨	٩٠
١٠٩ر١٤١	١١٨ر٤٩٨	١٢٤ر٣٤٢	١٢٩ر٥٦١	١٣٥ر٨٠٧	١٤٠ر١٦٩	١٤٩ر٤٤٩	١٠٠

## تابع جدول توزيع كا

م	٥٠٠٠٠	٧٥٠٠٠	٩٠٠٠٠	٩٥٠٠٠	٩٧٥٠٠	٩٩٠٠٠	٩٩٥٠٠
٢٠	١٩٣٣٧٤	١٥٤٥١٨	١٢٤٤٢٦	١٠٨٥٠٨	٩٥٩٠٨٣	٨٢٦٠٤٠	٧٤٣٣٨٦
٢١	٢٠٣٣٨٢	١٦٣٤٤٤	١٣٢٣٩٦	١١٥٩١٣	١٠٢٨٢٩٣	٨٩٩٧٢٠	٨٠٣٣٦٦
٢٢	٢١٣٣٧٠	١٧٢٣٩٦	١٤٠٤١٥	١٢٣٣٨٠	١٠٩٨٢٣	٩٥٤٢٤٩	٨٦٤٢٧٢
٢٣	٢٢٣٣٦٩	١٨١٣٧٣	١٤٨٤٧٩	١٣٠٩٠٥	١١٦٨٨٥	١٠١٩٥٦٧	٩٢٦٠٤٢
٢٤	٢٣٣٦٦٧	١٩٠٣٧٢	١٥٦٥٨٧	١٣٨٤٨٤	١٢٤٠١١	١٠٨٥٦٤	٩٨٨٦٢٣
٢٥	٢٤٣٣٦٦	١٩٩٣٩٣	١٦٤٧٣٤	١٤٦١١٤	١٣١١٩٧	١١٥٢٤٠	١٠٥١٩٧
٢٦	٢٥٣٣٦٤	٢٠٨٤٣٤	١٧٢٩١٩	١٥٣٧٩١	١٣٨٤٣٩	١٢١٩٨١	١١١٦٠٣
٢٧	٢٦٣٣٦٣	٢١٧٤٩٤	١٨١١٣٨	١٦١٥١٣	١٤٥٧٣٣	١٢٨٧٨٦	١١٨٠٧٦
٢٨	٢٧٣٣٦٣	٢٢٦٥٧٢	١٨٩٣٩٢	١٦٩٢٧٩	١٥٣٠٧٩	١٣٥٦٤٨	١٢٤٦١٣
٢٩	٢٨٣٣٦٢	٢٣٥٦٦٦	١٩٧٦٧٧	١٧٧٠٨٣	١٦٠٤٧١	١٤٢٥٦٥	١٣١٢١١
٣٠	٢٩٣٣٦٠	٢٤٤٧٧٦	٢٠٥٩٩٢	١٨٤٩٢٦	١٦٧٩٠٨	١٤٩٥٣٥	١٣٧٨٦٧
٤٠	٣٩٣٣٥٤	٣٣٦٦٠٣	٢٩٠٥٠٥	٢٦٥٠٩٣	٢٤٤٣٣١	٢٢١٦٤٣	٢٠٧٠٦٥
٥٠	٤٩٣٣٤٩	٤٢٩٤٢١	٣٧٦٨٨٦	٣٤٧٦٤٢	٣٢٣٥٧٤	٢٩٧٠٦٧	٢٧٩٩٠٧
٦٠	٥٩٣٣٤٧	٥٢٢٦٣٨	٤٦٤٥٨٩	٤٣١٨٧٩	٤٠٤٨١٧	٣٧٤٨٤٨	٣٥٥٣٤٦
٧٠	٦٩٣٣٤٤	٦١٦٩٨٣	٥٥٣٢٩٠	٥١٧٣٩٣	٤٨٧٥٧٦	٤٥٤٤١٨	٤٣٢٧٥٢
٨٠	٧٩٣٣٤٣	٧١١٤٤٥	٦٤٢٧٧٨	٦٠٣٩١٥	٥٧١٥٣٢	٥٣٥٤٠٠	٥١١٧٢٠
٩٠	٨٩٣٣٤٢	٨٠٦٢٤٧	٧٣٢٩١٢	٦٩١٢٦٠	٦٥٦٤٦٦	٦١٧٥٤١	٥٩١٩٦٣
١٠٠	٩٩٣٣٤١	٩٠١٣٣٢	٨٢٣٥٨٠	٧٧٩٢٩٥	٧٤٢٢١٩	٧٠٦٤٨	٦٧٣٢٧٦

فيما يلي بعض الأمثلة التي تبين كيفية استخدام جداول  $\chi^2$ .

مثال (١٣): إذا كان لدينا متغير عشوائي له توزيع  $\chi^2$  فأوجد قيمة  $\chi^2$  التي تجعل:

$$١ - ح ( \chi^2 < \chi^2_{\alpha} ) = ٠.٠٥$$

$$٢ - ح ( \chi^2 > \chi^2_{\alpha} ) = ٠.٩٩$$

وذلك إذا كانت درجات الحرية كما يلي:

أولاً:  $م = ٥$

ثانياً:  $م = ١٥$

الحل

أولاً: إذا كانت  $م = ٥$

$$١ - ح ( \chi^2 < \chi^2_{\alpha} ) = ٠.٠٥$$

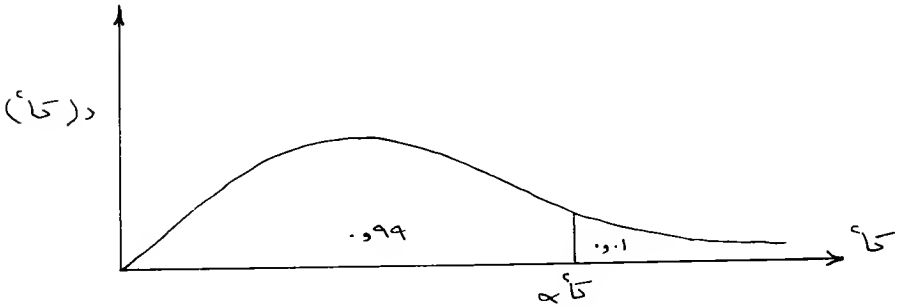
قيمة  $\chi^2_{\alpha}$  التي تحقق الاحتمال السابق هي  $\chi^2_{٠.٠٥}$ . وهي تلك القيمة الموجودة في جدول  $\chi^2$  عند تقاطع الصف  $م = ٥$  مع العمود  $\alpha = ٠.٠٥$  وبقراءتها من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{٠.٠٥} = ١١.٠٧٠٥$$

$$٢ - إذا كان ح ( \chi^2 > \chi^2_{\alpha} ) = ٠.٩٩$$

$$\text{فان ح ( \chi^2 < \chi^2_{\alpha} ) = ٠.٠١}$$

وذلك كما يتضح من الرسم التالي:



وعلى هذا فأ قيمة  $\chi^2_{\alpha}$  التي تحقق الاحتمال السابق هي  $\chi^2_{٠.٠١}$  وهي تلك القيمة الموجودة في جدول  $\chi^2$  عند تقاطع الصف  $م = ٥$  مع العمود  $\alpha = ٠.٠١$  وبالتالي فهي

$$\chi^2_{٠.٠١} = ١٥.٠٨٦٣$$

ثانياً: إذا كانت  $م = ١٥$

مثل الحالة السابقة تماماً ما عدا أن الصف الذي نبحث عنه في الجدول قد تغير فأصبح عند  $م =$

١٥ بدلا من م = ٥ و بهذا تكون:

$$١ - ك_{١٥}^٢ = ك_{٥}^٢ \text{ هي قيمة كا}^٢ \text{ الواقعة عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود } \alpha = ٥.٠٥ \text{ وتكون}$$
$$ك_{١٥}^٢ = ك_{٥}^٢ = ٢٤٩٩٥٨$$

$$٢ - ك_{١٥}^٢ = ك_{٥}^٢ \text{ هي قيمة كا}^٢ \text{ الواقعة عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود } \alpha = ٥.٠١ \text{ وتكون}$$
$$ك_{١٥}^٢ = ك_{٥}^٢ = ٣٠٥٧٧٩$$

## تمارين

١ -

إذا كان احتمال أن يفوز فريق كرة قدم في مباراة هو  $\frac{٢}{٣}$  . فما هو احتمال أن يفوز هذا الفريق في ٤ مباريات على الأقل إذا لعب ٦ مباريات؟

٢ -

٠ في عائلة بها ٦ أطفال ، إذا كان احتمال ولادة مولود ذكر ٥٢.٠ ، فما هو احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة؟

٣ -

٠ في مصنع للمصابيح الكهربائية، تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح منتجة ١٠٠ مصباح غير صالحة للاستعمال. سحبت عشوائيا عينة من المصابيح مكونة من ١٠ مصابيح، احسب الاحتمالات الآتية:

- ( أ ) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة صالحة للاستعمال .
- ( ب ) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة غير صالحة للاستعمال .
- ( ج ) أن يكون من بين المصابيح المسحوبة مصباح واحد على الأقل صالح للاستعمال .

٤ -

٠ اشترى شخص صندوقا به ثلاث بطيخات . فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو ٣.٠ فاحسب احتمال أن تكون:

- ( أ ) جميعها طيبة .
- ( ب ) واحدة تالفة .

٥ -

٠ إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو ٣ حوادث . فما احتمال وقوع ٤ حوادث في أحد الأيام؟

— ٦ —

٠ إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٨ر٠ احسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين .

— ٧ —

٠ إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبرى هو ٤ حرائق فما احتمال أن يقع في أحد الشهور:

( I ) ثلاثة حرائق ( II ) ثلاثة حرائق على الأكثر

— ٨ —

٠ إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق في مدينة ما هو ٤ حوادث ، فما احتمال وقوع:

( I ) حادثتين ؟  
( II ) حادثتين على الأقل ؟  
( III ) حادثتين على الأكثر ؟

— ٩ —

٠ إذا كان متوسط أطوال مجموعة كبيرة من الطلبة = ١٦٠ سم وانحرافه المعياري ٥ سم . أوجد الاحتمالات الآتية:

( أ ) الحصول على طالب طوله أكبر من ١٧٥ سم .  
( ب ) الحصول على طالب طوله أقل من ١٦٢ سم .  
( جـ ) الحصول على طالب طوله ينحصر بين ١٥٧٥ سم ، ١٦٧٥ سم .

— ١٠ —

تقدم ٣٠٠ شاب لإدارة التجنيد ، فإذا كانت أطوالهم تتبع توزيعا طبيعيا وسطه = ١٧٠ سم وانحرافه المعياري = ٨ سم . أوجد عدد الأشخاص المقبولين للتجنيد إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٦ سم .

١١ — إذا كان دخل ٦٠٠ أسرة في مدينة ما يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٣٦٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٦٠٠ ريال . فاوجد:

( أ ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٨٠٠ ريال .  
( ب ) احتمال الحصول على دخل يقل عن ٥١٠٠ ريال .  
( جـ ) عدد الأسر التي يقل دخلها عن ٢٤٠٠ ريال .

١٢- إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع «ت» بدرجات حرية م = ٩ فأوجد قيم ت<sub>١</sub> ، ت<sub>٢</sub> التي تحقق الاحتمالات الآتية :

- ١ - ح ( س < ت<sub>١</sub> ) = ٠.٠٥
- ب - ح ( س > ت<sub>٢</sub> ) = ٠.٠٥
- ج - ح ( ت<sub>١</sub> > س > ت<sub>٢</sub> ) = ٠.٩٥
- د - ح ( ت<sub>١</sub> > س > ت<sub>٢</sub> ) = ٠.٩٩

١٣- أوجد قيم ت<sub>١</sub> التي تجعل ح ( ت < ت<sub>١</sub> ) = ٠.٠٥ وذلك في الحالات الآتية :

- أ - عندما تكون درجات الحرية م = ١٦
- ب - عندما تكون درجات الحرية م = ٢٥
- ج - عندما تكون درجات الحرية م = ∞

١٤- ما هي قيم ت<sub>١</sub> ، ت<sub>٢</sub> ، التي تجعل ح ( ت<sub>١</sub> > ت > ت<sub>٢</sub> ) = ٠.٩٥ وذلك في الحالات الآتية :

- أ - عندما تكون درجات الحرية م = ٩
  - ب - عندما تكون درجات الحرية م = ٢٠
  - ج - عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠
  - د - قارن بين الحالات السابقة مع القيم المماثلة في حالة التوزيع الطبيعي القياسي .
- ١٥- إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع كا<sup>٢</sup> فأوجد قيم كا<sup>٢</sup> التي تحقق الاحتمالات الآتية :

- ١ - ح ( س < كا<sup>٢</sup><sub>١</sub> ) = ٠.٠٢٥
- ٢ - ح ( س > كا<sup>٢</sup><sub>٢</sub> ) = ٠.٩٩٥
- ٣ - ح ( كا<sup>٢</sup><sub>١</sub> > س > كا<sup>٢</sup><sub>٢</sub> ) = ٠.٠٤

وذلك في ضوء الجدول المتاح لديك وفي الحالات التالية :

- أ - عندما تكون درجات الحرية م = ٦
- ب - عندما تكون درجات الحرية م = ١٦
- ج - عندما تكون درجات الحرية م = ٢٧
- د - عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠

## الباب الرابع

### العينات





## العينات

(١-٤) — مقدمة :

يعتبر أسلوب المعاينة من أهم الأساليب الإحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المفردات (تسمى مجتمع) بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (تسمى عينة). إن الصعوبات التي تصادف الباحثين عند دراسة جميع مفردات المجتمع (خاصة إذا كان هذا المجتمع كبيراً) تجعل الباحثين يلجأون عادة إلى اختيار مجموعة صغيرة (تسمى عينة) يتم اختيارها من المجتمع بطريقة معينة بحيث تكون هذه المجموعة صورة مصغرة للمجتمع بقدر الإمكان ثم يقومون بدراسة هذه العينة بدقة للتعرف على خواصها ومعرفة معالمها مثل الوسط الحسابي والوسيط وغير ذلك من المقاييس الإحصائية ثم يقومون بتعميم النتائج التي يحصلون عليها إلى المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة. وبالطبع لا يكون هذا التعميم من العينة إلى المجتمع له معنى أو قيمة علمية إلا إذا تم اختيار المفردات بطريقة تضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلاً صادقاً ومثل هذه العينات يطلق عليها اسم العينات العشوائية. ونلاحظ أنه عند دراسة خصائص المجتمعات يوجد أماناً أسلوبان لجمع المعلومات وهما :

(أ) جمع البيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع وهذا يسمى بأسلوب الحصر الشامل.

(ب) نختار عينة من المجتمع ونحصل منها على المعلومات التي نلزمنا وندرس خصائصها ونعمم النتائج التي نحصل عليها على المجتمع الأصلي وهذا يسمى بأسلوب العينة.

ولا شك أن لكل من هذين الأسلوبين مزاياه وعيوبه — فأسلوب الحصر الشامل يتطلب منا وفرة من الوقت والمال والمجهود الفني وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما كبر حجم المجتمع. وبالإضافة إلى ذلك فقد رأينا في دراستنا لمبادئ الإحصاء عند حساب المقاييس الإحصائية المختلفة كيف أن العمل الحسابي يزداد مشقة كلما كبر عدد المفردات الداخلة في البحث. هذا غير ما يتطلبه الحصول على البيانات من وقت وجهد وتكاليف لهذا نجد أن الحصر الشامل لكل مفردات المجتمع قد يعرض البيانات للخطأ والإهمال سواء في عملية تصميم البحث أو أثناء جمع البيانات أو أثناء حساب المقاييس الإحصائية ولكن إذا توفر لنا المال اللازم لاستخدام جامعي البيانات المدربين والمشرفين الأكفاء على جامعي البيانات وتوفر كذلك الوقت والإمكانات اللازمة لفحص كل مفردات المجتمع ولإجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة فإننا بلا شك نستطيع بالحصر

الشامل أن نحصل على صورة حقيقية عن المجتمع الذي ندرسه . ولكن في الواقع لا نستطيع دائما توفير كل هذه المقومات من مال ووقت ووسائل فنية وعادة ما نواجه بنقص فيها وبالتالي نتعرض للعديد من الأخطاء سواء في تصميم البحث أو في جمع البيانات أو في العمل الحسابي وهذه الأخطاء تسمى بأخطاء التحيز، وقد يتبادر للذهن أن الحصر الشامل يجنبنا الأخطاء لأننا نقوم بدراسة جميع مفردات المجتمع ولكننا وجدنا أن الحصر الشامل عرضة لخطأ التحيز الذي يزداد حجمه كلما ازداد الفرق بين الإمكانات اللازمة والإمكانات المتوفرة لدراسة المجتمع . ومن هنا ظهرت فكرة العينات وهي أننا نأخذ مجموعة صغيرة من مفردات المجتمع نختارها بطريقة عشوائية بحيث تكون هذه العينة صورة مصغرة للمجتمع وفي نفس الوقت يكون عدد مفرداتها صغيرا يمكن التحكم فيه ويمكن تدبير الوقت والمال والوسائل الفنية اللازمة لدراسته بحيث يمكن أن نحصر خطأ التحيز في أضيق الحدود . وما لا شك فيه أن خطأ التحيز في دراسة العينة أقل بكثير منه في دراسة جميع مفردات المجتمع .

وليس معنى هذا أن تكون نتائج أسلوب العينة أفضل دائما من نتائج أسلوب الحصر الشامل فأسلوب العينة يكون عرضة لنوع آخر من الخطأ يسمى خطأ الصدفة وهو ذلك الخطأ الناتج عن دراسة جزء من المجتمع (هي العينة) تدخلت عوامل الصدفة بصورة كبيرة في طريقة اختياره وبالتالي فإن الصدفة وحدها هي التي قد تجعل هذا الجزء ممثلا تمثيلا صادقا للمجتمع وهي التي قد تجعل هذا التمثيل غير صادق أو غير حقيقي . هذا ينعكس على تعميم النتائج من العينة إلى المجتمع .

معنى هذا أن الحصر الشامل يتعرض لنوع واحد من الخطأ . هو خطأ التحيز بينما تتعرض العينة لنوعين من الخطأ وهما خطأ الصدفة وخطأ التحيز . ولكن في كثير من الأحيان يمكن التحكم في خطأ التحيز الذي تتعرض له العينة بحيث يصبح مجموع خطأي الصدفة والتحيز في العينة أقل بكثير من خطأ التحيز الذي يتعرض له الحصر الشامل وهذا ما يدفعنا إلى استخدام العينات في العديد من الدراسات .

مثال ذلك إذا أردنا معرفة متوسط الأجر لعمال صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات . فإن أسلوب الحصر الشامل يتطلب منا الحصول على معلومات عن كل عامل من عمال هذه الصناعة وهذا يتطلب وقتا وجهدا كبيرين وخاصة إذا كان عدد العمال في هذه الصناعة كبيرا أو كانت مصانع النسيج منتشرة في مناطق متفرقة متباعدة و يتحتم علينا في الحصر الشامل مقابلة كل عامل على حدة وسؤاله عن أجره وتسجيل ما نحصل عليه من بيانات ثم تجميع هذه البيانات وتحليلها لاستخلاص ما نريده من معلومات وحساب متوسط الأجر . في مثل هذه الحالات نجد أن أسلوب الحصر الشامل يكبدنا مشقة وتكاليف باهظة ومحتاج إلى وقت ومجهود كبيرين فضلا عن أننا قد نقع في خطأ التحيز مما يترتب عليه أننا لا نحصل على المتوسط الحقيقي للأجر بعد كل ما نواجهه من مشقة .

لهذا فإننا نلجأ إلى أسلوب العينة وذلك باختيار عينة عشوائية من عمال هذه الصناعة بحيث تكون ممثلة تمثيلاً صادقاً للمجتمع أو تعتبر صورة مصغرة . منه . ثم نقوم بسؤال كل عامل في هذه العينة وتسجيل البيانات التي نحصل عليها منه ثم نحسب متوسط الأجر في العينة فإذا وجدنا متوسط الأجر في العينة هو ثلاثة آلاف ريال في الشهر . وحيث أن العينة تعتبر صورة مصغرة للمجتمع فإنه يمكننا أن نستنتج أن متوسط الأجرين كل عمال هذه الصناعة في حدود ثلاثة آلاف ريال تقريباً والنتيجة التي توصلنا إليها هذه بالنسبة لمتوسط الأجرين عمال الصناعة كلها تعتبر نتيجة احتمالية غير مؤكدة تأكيداً كاملاً لهذا يجب علينا معرفة مدى ثقتنا في صحة هذه النتيجة . ولقياس درجة هذه الثقة فإننا نستخدم الاحتمالات وهذا هو أحد الأسباب في تكريس الفصول السابقة لنظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية وإذا كانت نظرية الاحتمالات فرع من فروع الرياضة البحتة فإن دراسة العينات واستخدامها للاحتتمالات تدخل بنا إلى صلب الطرق الإحصائية والتي سندرس جزءاً منها في الأبواب التالية :

ومما هو جدير بالذكر أن التغلب على خطأ التحيز ليس هو السبب الوحيد الذي يجعلنا نلجأ إلى استخدام العينات وإنما هناك أسباب أخرى كثيرة نذكر منها مثلاً ما يلي :

- (١) عندما يؤدي أسلوب الحصر الشامل إلى تدمير كل مفردات المجتمع المدروس مثل محاولة معرفة متوسط عمر المصباح الكهربائي التي ينتجها مصنع معين ، إذ يتطلب أسلوب الحصر الشامل إضاءة كل مصباح من إنتاج المصنع حتى يحترق لمعرفة عمره وهذا يترتب عليه تدمير كل إنتاج المصنع ولهذا لا بد من اللجوء إلى أسلوب العينة لمثل هذه الدراسة — كذلك عند دراسة تركيب دم الإنسان لا يعقل استخدام أسلوب الحصر الشامل الذي يؤدي إلى سحب كل دم الإنسان .
- (٢) عندما يتعذر تحديد جميع مفردات المجتمع لإجراء حصر شامل مثل دراسة أذواق المستهلكين لسلعة معينة لإدخال بعض التعديلات على إنتاج هذه السلعة . في هذه الحالة يصعب علينا تحديد كل المستهلكين لها لهذا نلجأ إلى أخذ عينة من المستهلكين .

وفي ختام هذه المقدمة يجب الإشارة إلى أنه في حالة توفر كل الإمكانيات اللازمة لدراسة المجتمع من وقت وجهد ومال ووسائل فنية يكون أسلوب الحصر الشامل أفضل من أسلوب العينة كما يحدث في حالة التعدادات العامة للسكان — أما عند نقص هذه الإمكانيات فيكون أسلوب العينة هو الأفضل . وقد انتشر استخدام العينات في معظم الدراسات الاقتصادية والاجتماعية والسكانية والعلمية ومراقبة الإنتاج وغير ذلك من المجالات .

#### (٢-٤) — بعض أنواع العينات العشوائية :

سنتناول الآن بالدراسة بعض أنواع العينات العشوائية وطريقة الاختيار لكل منها :

## (١) العينات العشوائية البسيطة:

هي العينات التي يراعى عند اختيارها تكافؤ الفرص أمام كل مفردات المجتمع . بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متساوية مع بقية المفردات لاختيارها في العينة و يتم ذلك عن طريق الاختيار العشوائي لمفردات العينة من بين مفردات المجتمع . ولهذا يجب معرفة المفاهيم التالية :

### ( أ ) الإطار :

حتى يمكن اختيار العينة فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا و يكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة) تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى بالإطار. فمثلا إذا أردنا اختيار عينة من عمال صناعة النسيج ( كما ذكرنا سابقا ) لتقدير متوسط أجر العامل فإنه يلزمنا وجود قائمة بأسماء العمال وأجر كل منهم في هذه الصناعة وهذا هو الإطار، ويجب أن يكون شاملا لكل مفردات المجتمع أي لكل عمال الصناعة وأن يكون حديثا حتى يشمل على العمال الجدد المعيينين حديثا وأن يحدد لنا بدقة كل المعلومات التي نلزمنا في الدراسة . ثم نبدأ في اختيار العينة من الإطار و يتم ذلك عن طريق إعطاء كل مفردة رقما مسلسلا ثم اختيار العينة بطريقة الاختيار العشوائي .

### (ب) الاختيار العشوائي:

يتم الاختيار العشوائي بطريقة معينة تضمن فرصا متساوية لاختيار المفردات في العينة . وليس معنى الاختيار العشوائي أن يكون اختيارا حسيما اتفق أو كما يقولون ضرب عشواء ، فقد يظن البعض أن الاختيار العشوائي من قائمة مكتوب بها مجموعة من الأسماء أن نفتح صفحة من هذه القائمة ثم نمسك بالقلم ونغمض أعيننا ثم نضع القلم على الصفحة ثم نفتح أعيننا ونختار الاسم الذي وقع عليه القلم . في الواقع هذا النوع من الاختيار لا يخلو من التحيز حيث أن الإنسان المغمض العينين يحاول دائما أن يضع القلم في وسط الصفحة ( خشية أن يخرج قلمه عن حدود الصفحة ) وهذا الحذر يعطي للأسماء الموجودة في وسط الصفحة فرصة أكبر من الأسماء الموجودة على الأطراف وإنما الاختيار العشوائي يمكن أن يتم بطريقة مبسطة جدا وذلك بأن نكتب الأعداد ( صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ ) على عشر بطاقات (أو عشرة كرات) متشابهة تماما في كل شيء من حيث اللون والحجم والوزن وكل الصفات . ونضع البطاقات العشر (أو الكرات العشر) في كيس أو وعاء مغلق يدور بالبطاقات (أو الكرات) فيخلطها في بعضها خلطا جيدا و بهذا لوسحبنا أي بطاقة (أو كرة) من الكيس لا نعرف بالضبط ما هي البطاقة التي سنحصل عليها وإنما تكون الفرصة واحدة لكل البطاقات في الظهور . فلو كان حجم العينة ٢٥٠ مفردة مثلا وعدد المفردات في الإطار خمسة آلاف مفردة— فلنختار العينة من الإطار نلاحظ أن ترتيب أي مفردة لا بد أن

يتراوح بين ١ و ٥٠٠٠ — أي أن أكبر رقم مسلسل في الإطار يتكون من ٤ خانات (آحاد — عشرات — مئات — ألوف) لهذا يجب أن نختار لكل مفردة من مفردات العينة ٤ بطاقات كل بطاقة تعطي لنا رقما من الخانات الأربعة — فمثلا نسحب بطاقة عشوائية من البطاقات المحكمة المختلط في الكيس نفرض مثلا أننا وجدنا عليها العدد (٣) فيكون هورقم الآلاف — ثم نرجع البطاقة إلى الكيس ونحكم خلطها مع بقية البطاقات وذلك بدوران الكيس ثم نسحب بطاقة ثانية نفرض أننا وجدنا عليها العدد (صفر) فيكون هورقم المئات ونكرر العملية مرتين لنحصل على رقمي العشرات والآحاد ونفرض أننا وجدناهما (٣) للعشرات و(٧) للآحاد فيكون الرقم المسلسل لهذه المفردة هو (٣٠٣٧) في الإطار. ونعتبر هذه هي المفردة الأولى في العينة — أي أن أول مفردة في العينة هي المفردة التي تحمل الرقم (٣٠٣٧) في الإطار. ونكرر هذا العمل للحصول على المفردة الثانية والثالثة والرابعة إلى آخر مفردات العينة وذلك مع استبعاد الأرقام المكررة التي سبق اختيارها من الإطار وكذلك الأرقام التي تزيد عن ٥٠٠٠ أي عن حجم الإطار. وبهذه الطريقة يمكن القول أن العينة عشوائية وأنها ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا أو أنها صورة مصغرة للمجتمع وبالتالي يمكن تعميم أي نتائج نحصل عليها من العينة على كل مفردات المجتمع الأصلي وليست طريقة البطاقات (أو الكور) هي الطريقة الوحيدة للاختيار العشوائي وإنما هناك جداول للأعداد العشوائية مصممة لهذا الغرض — وهي عبارة عن أعداد مختارة بالطريقة العشوائية (بالبطاقات أو الكور) ومرتبعة في شكل أعمدة وصفوف لتوفير المجهود الذي يبذل في الاختيار العشوائي بواسطة البطاقات وتأخذ جداول الأعداد العشوائية الشكل التالي :

٤٧٦٣٥	٧٦٥٣٤	٧٥٢٠٠	٨٤٢٥٧
٥٨٩٧١	٦٨١٢٣	٨٧٤٣١	٦٣٥٨٦
٥٣٢٠٢	٢٠٤٥٠	١٢٣٤٥	٧٩٤٧١
٩٤٠٣٦	١٣٤٦١	١٣٧٦٤	٥٦٣٨٥
٩٠٠٠١	٦٠٨٧٢	٢٦٨٣٠	٠٠٧٦٥
٣٥٠٢١	٠٠٧٨٢	٠٩٨٧١	٧٦٤٥٣
٧٦٨٢٤	١٨٦٤١	٦٠٥٣٠	٨٤٢٥٢
١٥٨٧٦	٤٥٧٨٩	٩٣٠٨٠	٠١٦٣٥
٠٦٨٧١	٠٤١٢٣	٨٤٣٢٣	٢٩٠٥٤

• • • •

و يشتمل جدول الأعداد العشوائية على صفحات عديدة من هذه الأرقام العشوائية . و يوجد نموذج من هذا الجدول في نهاية هذا الباب .

فمثلا لاختيار العينة السابقة التي حجمها ٢٥٠ مفردة من مجتمع عدد مفرداته ٥٠٠٠ — نلاحظ أن أكبر رقم مسلسل في المجتمع وهو ٥٠٠٠ مكون من ٤ خانات لهذا نختار أربع أعمدة (أو أربعة صفوف) من الجدول عشوائيا لنفرض أنها الأعمدة (الثالث والرابع والخامس والسادس) فنحصل على الأرقام التالية :

٠٨٤٢

١٦٣٥

٥٧٩٤

٤٥٦٣

٠٠٠٧

١٧٦٤

٠٨٤٢

٠٠١٦

٣٢٩٠

٦١٠٢

•

•

•

•

•

•

نستبعد من الأرقام السابقة كل الأرقام التي تزيد عن خمسة آلاف وهو أكبر رقم في الإطار لهذا نستبعد الرقم الثالث (٥٧٩٤) والرقم العاشر (٦١٠٢) كذلك نستبعد أي رقم مكرر لهذا نستبعد الرقم السابع لأنه مكرر في الأول ثم نرتب بقية الأرقام ترتيبا تصاعديا فنحصل على أرقام المفردات التي يجب أن نسحبها من الإطار وهم العمال ذوي الأرقام المسلسلة التالية:

١٦-٧-٨٤٢-١٦٣٥-١٦٧٤-٣٢٩٠-٤٥٦٣-٠٠٠٠ وهكذا حتى نحصل على ٢٥٠ مفردة وهي كل مفردات العينة.

وعند استخدام جدول الأعداد العشوائية يجب عند البداية فتح الجدول عشوائيا على أي صفحة دون اختيار صفحة معينة ثم نختار العمود الأول (أو الصف الأول) عشوائيا وبعد ذلك يمكن أخذ الأرقام من الجدول حسب ترتيبها داخل الجدول حيث أنها مرتبة داخل الجدول عشوائيا.

## (٢) العينة العشوائية المنتظمة:

إن اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع رقما مسلسلا داخل الإطار. ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المسلسل لكل مفردة يبعد بعدا ثابتا منتظما عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك عن رقم المفردة اللاحقة لها - ويتم ذلك على النحو الآتي:

- (أ) نقسم الإطار إلى فترات منتظمة وليكن طول كل منها  $F$  ويتوقف على حجم العينة.
- (ب) نختار عشوائيا مفردة واحدة من مفردات الفترة الأولى ولتكن المفردة رقم  $L$ .
- (ج) بذلك تتحدد تماما مفردات العينة وهي المفردات التي أرقامها المسلسلة هي:  $L, L+F, L+2F, \dots$

مثال:

(أ)

نفرض أن حجم العينة المطلوبة هو ٥% من حجم المجتمع أي أن من بين كل ١٠٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى ٥ مفردات في العينة أو من بين كل ٢٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى مفردة واحدة في العينة.

(ب)

نقسم الإطار إلى فترات طول كل منها ٢٠ مفردة فتكون أرقام الفترة الأولى في الإطار هي

١-٢-٣-٠٠٠-٢٠

وأرقام الفترة الثانية في الإطار هي ٢١-٢٢-٠٠٠-٤٠

وهكذا حتى نهاية المفردات في المجتمع.

(ج)

تستخدم الطريقة العشوائية البسيطة السابقة لاختيار مفردة واحدة من مفردات الفترة الأولى لتكون هي أول مفردة في العينة لنفرض أننا حصلنا على الرقم ١٧ مثلاً.

(۵)

بعد تحديد المفردة الأولى في العينة يتحدد تماماً باقي مفردات العينة كل ما هو مطلوب أن نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الأولى لنحصل على رقم المفردة الثانية ثم نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الثانية لنحصل على رقم المفردة الثالثة وهكذا حتى نحصل على كل مفردات العينة. و بهذا تتكون العينة من المفردات التي أرقامها المسلسلة في الإطار هي:

.....-11V-9V-7V-5V-3V-1V

نلاحظ أن طريقة الاختيار في هذه العينة أسهل من العينة العشوائية البسيطة وذلك لأن الاختيار العشوائي يتم بالنسبة لأول مفردة فقط أما باقي المفردات فتتحدد تلقائياً حسب رقم أول مفردة وحجم العينة— كما أن العينة تكون منتشرة على كل أجزاء المجتمع وبالتالي تكون أكثر تمثيلاً وخاصة إذا كان المجتمع غير متماثل— ولكن هذه الميزات يقابلها صعوبة في تحليل نتائج هذا النوع من العينات ولا يتسع المجال هنا للتعرض لمثل هذه الصعوبات التي تحتاج إلى قدر أكبر من الدراسة في نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ونظرية التقدير لهذا فقد اكتفينا بتعريفها وتوضيح طريقة اختيارها فقط .

(٣) العينة الطبقية :

نلجأ إلى هذا النوع من العينات في الحالة التي يكون فيها المجتمع مكوناً من طبقات غير متجانسة و يتحتم علينا تمثيل كل هذه الطبقات داخل العينة بحيث يتم تمثيل كل طبقة بعدد من المفردات يتناسب حجمه مع أهمية هذه الطبقة في المجتمع وبالتالي لا بد أن نختار مفردات العينة من جميع الطبقات بعد تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة ثم نختار هذه المفردات من داخل الطبقة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة وذلك حسب ما يراه الباحث .

وما هو جدير بالذكر أنه يوجد عدة أنواع أخرى من العينات منها العينات المتعددة المراحل والعينات العنقودية وغيرها مما لا يتسع المجال للتعرض لها بالتفصيل . لهذا نكتفي فقط بذكر الأنواع الثلاثة السابقة حيث أن هذا القدر من الدراسة يسمح لنا بتفهم تحليل نتائج العينات وهو موضوع الدراسة في الباب التالي .



## نموذج من جدول الأعداد العشوائية

١٥	٤٩	٤٨	٠٢	٧٧	٩٥	١٦	٥٣	٥٠	٣٢
٢٨	١٢	٣٦	٦٧	٦٤	٨٢	٥١	٤٠	٥٣	٩٢
٣٤	٢٥	٤٣	٥٥	١٢	٥٩	٣٤	٢١	٧٠	٢٧
٢٣	٨٢	٧١	٣٧	١٦	٩١	٧٠	١٦	١٠	٢٥
٦٧	٨٣	٤٣	٤٢	٣٧	٨٣	٤٩	٣٣	١١	٣١

٧٦	٤١	٨٤	١٧	٤٤	١٤	٧٨	٧٧	٥٤	٤٠
٨٥	٥٩	٨٨	٧٦	٦٤	١٧	٤٧	٦٤	١١	٣٤
٩٢	٠٢	٨٠	٤٧	٢٨	٣٢	٦١	٣٧	٨٧	١٨
٥٨	٦٨	٦٥	٢١	٥٣	٧٩	٤٤	١٢	٦٧	٩٤
٢٧	٤٢	٩٨	٩٦	٥١	١٤	٢١	٤٤	٧٣	٤٠

٣١	٧٠	٧٩	٣٠	٣١	٩١	٥٨	١٤	١٧	٦٣
٤٠	٨٢	٨٤	١٥	٩٥	٩٦	١٨	١٥	٧٠	٣٩
٥٩	٩٥	٢٣	٠٦	٤٦	٥٤	١٠	٢٥	٩١	٥٩
٦٤	٦١	٣٠	٦٤	٨٤	٥٢	٦٨	٥٣	٢٨	٠٥
٤٣	٥٦	٤٢	٥٥	٢١	٣٥	٧٠	٨٢	١٢	٦٣

• 9	82	27	40	• 8	• 0	13	82	47	23
78	79	40	• •	73	24	00	77	70	80
37	80	92	19	79	98	77	98	00	20
• 7	37	24	43	• 3	90	77	01	22	71
82	37	13	90	23	90	03	04	77	78

81	30	• 7	04	20	• •	44	73	11	80
73	77	30	83	• 8	• 4	74	00	71	22
73	44	40	90	38	04	90	37	39	80
42	78	82	04	98	79	• 0	18	43	21
78	72	90	83	74	92	29	70	70	11

93	19	92	72	73	00	24	04	93	28
• 2	04	70	77	22	22	22	07	07	73
72	01	73	70	74	48	20	17	14	30
38	• 7	18	42	07	02	09	77	27	48
71	49	14	77	44	72	30	90	38	22

90	19	74	79	73	40	17	20	• 7	19
47	97	30	40	94	81	77	23	• 7	41
41	77	27	31	19	70	77	89	77	11

99	87	98	97	02	31	88	70	08	02
91	77	78	83	19	79	21	83	91	88

77	98	78	08	78	70	22	88	90	12
17	98	83	70	11	07	88	88	98	79
88	88	71	28	80	31	01	70	22	80
97	28	03	88	13	20	17	07	70	87
07	10	88	87	98	18	09	07	90	82

77	02	03	17	01	02	10	81	81	07
18	80	77	71	28	17	00	08	23	39
93	80	88	88	02	78	72	99	87	79
90	73	23	18	22	80	99	00	82	08
80	81	39	30	28	00	80	72	78	91

28	77	88	70	07	12	88	97	78	37
09	19	88	70	92	77	17	30	97	18
97	97	73	13	01	73	23	09	19	88
82	78	02	09	81	83	82	20	12	89
37	37	80	79	82	07	71	90	82	80

90	1	23	39	78	27	77	02	28	98
70	72	27	72	22	37	80	20	92	17
20	29	28	08	00	18	22	29	09	02
70	78	00	29	97	07	22	88	07	27
97	01	00	22	00	17	10	07	07	82

72	72	08	97	28	77	27	29	92	72
20	20	27	22	72	77	72	70	92	18
91	70	77	81	02	21	21	19	20	72
90	80	77	17	92	20	01	70	92	12
17	22	29	92	98	78	00	72	17	01

71	72	22	07	72	29	07	10	27	21
80	20	27	10	10	72	81	00	71	21
12	29	02	78	72	08	18	99	02	07
22	02	77	20	90	80	28	02	72	29
82	20	17	02	71	92	17	79	08	72

72	91	00	80	02	72	70	02	07	29
08	08	02	28	00	09	22	71	79	29
22	00	18	00	72	02	17	27	28	10

۸۳ ۳۹ ۲۹ ۳۷ ۴۴ ۴۳ ۳۲ ۷۳ ۸۶ ۵۲

۹۸ ۲۵ ۱۹ ۰۷ ۳۲ ۶۴ ۸۹ ۸۱ ۷۱ ۴۷

۶۱ ۵۵ ۲۵ ۲۵ ۶۶ ۵۹ ۸۴ ۶۹ ۹۵ ۷۲

۷۲ ۲۸ ۱۱ ۷۲ ۱۶ ۲۴ ۶۱ ۲۹ ۹۴ ۱۹

۴۵ ۷۶ ۰۳ ۵۳ ۱۲ ۰۳ ۴۰ ۳۶ ۲۲ ۲۶

۵۸ ۵۷ ۷۶ ۱۱ ۷۵ ۱۹ ۶۶ ۱۵ ۶۵ ۳۷

۲۲ ۱۲ ۹۹ ۱۲ ۳۶ ۴۸ ۵۰ ۸۳ ۹۰ ۵۴

۸۸ ۱۵ ۸۰ ۹۴ ۹۶ ۳۹ ۹۹ ۷۲ ۵۸ ۸۰

۱۳ ۰۸ ۳۷ ۵۸ ۲۵ ۷۴ ۹۱ ۵۴ ۰۶ ۳۰

۷۵ ۰۴ ۶۲ ۵۳ ۳۲ ۶۰ ۲۴ ۲۴ ۵۲ ۱۶

۷۵ ۶۴ ۴۵ ۴۹ ۷۱ ۸۹ ۲۲ ۳۵ ۳۵ ۰۳

۵۷ ۸۴ ۹۱ ۲۶ ۳۸ ۸۶ ۷۳ ۰۶ ۰۷ ۳۴

۳۴ ۰۱ ۴۲ ۳۰ ۸۸ ۲۵ ۷۳ ۴۵ ۱۸ ۸۰

۷۵ ۳۸ ۶۹ ۱۲ ۷۵ ۳۶ ۹۶ ۹۳ ۴۸ ۱۸

۲۱ ۶۳ ۶۳ ۷۵ ۶۹ ۴۰ ۶۰ ۳۰ ۹۱ ۳۵

۳۷ ۵۶ ۷۳ ۷۸ ۱۱ ۷۳ ۳۱ ۳۱ ۹۶ ۵۶

۱۹ ۹۸ ۶۴ ۸۲ ۶۷ ۳۸ ۷۸ ۶۶ ۳۲ ۷۸

४४	७०	७६	७१	३०	७६	१९	३७	६१	६६
१०	७१	६२	२८	०७	७०	२६	७२	२३	७८
७०	२७	०८	१७	९७	३७	२२	२२	६७	१८
६०	९७	०१	८८	१७	७८	६६	२७	६२	०२
०१	३०	७३	७७	७७	७९	०१	९६	७८	८७

## الباب الخامس

### توزيعات المعاينة (العينات الكبيرة)





## توزيعات المعاينة (العينات الكبيرة)

### (١-٥) - مقدمة :

في هذا الباب نقدم بعض الطرق الإحصائية التي تمكننا من استخدام العينات العشوائية في التعرف على خواص المجتمعات التي سحبت منها هذه العينات . فإذا كنا نهتم بمعرفة متوسط أجر العامل في صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات فيمكن سحب عينة عشوائية من العمال في هذه الصناعة ونحسب متوسطها — نفرض أننا وجدنا متوسط أجر العامل في العينة هو ٣ آلاف ريال في الشهر فليس معنى ذلك أن يكون متوسط أجر العامل في الصناعة كلها ٣ آلاف ريال . وذلك لأن هذه العينة العشوائية قد يظهر فيها بالصدفة البحتة عدد كبير من العمال ذوي الأجور المرتفعة وبالتالي يكون متوسط أجر العامل في العينة أعلى من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع وقد يحدث العكس بأن تشمل العينة على عدد كبير من العمال ذوي الأجور المنخفضة مما يجعل متوسط أجر العامل في العينة أقل من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع . وكما ترى تكون الصدفة وحدها هي التي قد تسبب هذه الاختلافات بالزيادة أو بالنقص بين متوسط الأجر في العينة ومتوسط الأجر في المجتمع . وهذا هو خطأ الصدفة الذي سبق أن تكلمنا عنه في الباب السابق و يهملنا الآن أن ندرس تأثير هذا الخطأ على أي مقياس إحصائي نحسبه من العينة سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو غيره من المقاييس . ولنبدأ الآن بدراسة أثر خطأ الصدفة على الوسط الحسابي للعينة وإلى أي حد يمكن أن يختلف عن الوسط الحسابي للمجتمع بفعل تأثير هذا الخطأ .

### (٢-٥) - توزيعات المعاينة :

نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معيناً (سواء كان هذا المجتمع كبيرا أو محدودا) وأننا بصدد سحب عينة حجمها  $n$  من هذا المجتمع . بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو  $n$  من المفردات .

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها  $n$  من هذا المجتمع وحسبنا من هذه العينة مقياسا معيناً (وليكن الوسط الحسابي) ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم  $n$  وحسبنا منها نفس المقياس ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع . سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتكون مجتمعا آخر .

عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي . وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (هى التي حصلنا عليها من هذه العينات) ويتبع توزيعا معيناً ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي يسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو نسبة المفردات التي لها صفة معينة أو الانحراف المعياري أو غيره من المقاييس الإحصائية .

**مثال (١) :** مجتمع مكون من ١٠ مفردات سحبت عينات حجمها ٣ من هذا المجتمع وحسبت من كل عينة مقياس احصائي معين (وليكن الوسط الحسابي) فكم قراءة يتكون منها مجتمع هذا المقياس ؟

### الحل

عدد مفردات المجتمع الأصلي = ١٠ مفردات  
حجم العينة = ٣ مفردات  
إذن عدد العينات التي يمكن سحبها =  $10^3 = 120$   
وحيث أننا نحسب المقياس لكل عينة  
إذن مجتمع هذا المقياس يتكون من ١٢٠ قراءة .  
وبالمقارنة نجد أن عدد مفردات مجتمع المقياس أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي .

### (٣-٥) - المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة :

في دراستنا لتوزيعات المعاينة لابد أن نفرق بين العينات المسحوبة من مجتمعات كبيرة أو لا نهائية وبين العينات المسحوبة من مجتمعات محدودة . فعند سحب عينة من المصابيح من إنتاج مصنع معين فإننا بلا شك نسحب من مجتمع كبير هو إنتاج المصنع . ولكن عند سحب عينة من طلبية قسم المحاسبة في كلية الاقتصاد والإدارة في العام الحالي فإننا بلا شك نسحب من مجتمع محدود هو طلبية قسم المحاسبة لهذا العام . وكذلك عند سحب عينة مكونة من عشرة مفردات من بين مجتمع مكون من مائة مفردة . في هذه الحالة إذا كان في الإمكان سحب المفردة أكثر من مرة يمكن اعتبار المجتمع لا نهائي أو كبير ولكن إذا لم يكن مسموحاً بسحب المفردة أكثر من مرة يكون المجتمع محدوداً . وأيضاً عند سحب كرات من كيس به عدد من الكرات فإذا كان السحب مع الإعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه كأنه مجتمعا لا نهائيا ونعامله على أنه مجتمع غير محدود وإذا كان السحب بدون إعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه مجتمعا محدوداً . وما هو جدير بالذكر أننا نهتم بالفرقة بين المجتمع الكبير والمجتمع المحدود بسبب اختلاف خصائص توزيعات المعاينة للعينات المسحوبة من المجتمعات الكبيرة عن تلك المسحوبة من المجتمعات المحدودة كما سيتضح من دراستنا التالية .

## (٤-٥) - مجتمع المتوسطات الحسابية وبعض خصائصه:

نفرض أن لدينا مجتمعا ولتكن مفرداته هي:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

ونفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها  $n$  وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه  $\bar{x}$  ثم سحبنا عينة أخرى لها نفس الحجم وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه  $\bar{y}$ ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم ووجدنا أن وسطها الحسابي  $\bar{z}$  وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها  $n$  والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهي تكون مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها  $n$  والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$$

وهذه المتوسطات تختلف عن بعضها تبعا لتأثير خطأ الصدفة على كل عينة كما أنها تكون مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي يهمنا معرفته ودراسته. ومجتمع المتوسطات الحسابية  $\bar{x}$  كأبي مجتمع آخر له توزيع احتمالي يتمتع بجميع صفات وخواص التوزيعات الاحتمالية وبالطبع له متوسط وانحراف معياري فلو كان:

$$\mu = \text{متوسط المجتمع الأصلي}$$

$$\sigma = \text{والانحراف المعياري للمجتمع الأصلي}$$

فيمكن باستخدام النظريات الإحصائية والرياضية إثبات أن:

$$\mu = \text{متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجم كل منها } n \text{ هو}$$

$$\text{والانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \right\} = \text{إذا كان المجتمع محدودا وحجمه } n.$$

وهذا يعني أن متوسط مجتمع المتوسطات هو نفسه متوسط المجتمع الأصلي. والانحراف المعياري هو الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي مضروبا في عامل معين. وهذه المعلومات صحيحة مهما اختلف التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات عن التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي.

وإذا نظرنا إلى الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات نلاحظ أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانساً من المجتمع الأصلي أى أن مفرداته متجانسة وغير متشتتة إذا قورنت بمفردات المجتمع الأصلي وهذا من أهم الأسباب التي تجعلنا نعتمد على مجتمع المتوسطات في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي.

فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي = ١٥ وحجم العينة = ١٠٠ مفردة

$$\text{فإن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1.5$$

وهذا يوضح أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانساً بقدر واضح من المجتمع الأصلي.

مثال (٢) : نفرض أن لدينا مجتمعاً مكوناً من المفردات التالية:

$$٨ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٢$$

والمطلوب :

- ( أ ) حساب متوسط المجتمع الأصلي.
- ( ب ) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي.
- ( ج ) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها مع الإرجاع.
- ( د ) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة.
- ( هـ ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية  $\mu_{(٢)}$ .
- ( و ) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية  $\sigma_{(٢)}$ .
- ( ز ) قارن بين  $\mu_{(٢)}$  و  $\mu_{(٢)}$  وكذلك بين  $\sigma_{(٢)}$  و  $\sigma_{(٢)}$ .

الحل

( أ ) متوسط المجتمع الأصلي  $\mu = \frac{٨ + ٦ + ٥ + ٤ + ٢}{٥} = ٥$

( ب ) الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي

$$\sigma = \sqrt{\frac{٢(٥ - ٨)^2 + ٢(٥ - ٦)^2 + ٢(٥ - ٤)^2 + ٢(٥ - ٢)^2}{٥}} = ٢$$

( ج ) بما أن حجم العينة ن = ٢

إذن كل العينات الممكن سحبها مع الإرجاع من هذا المجتمع هي:

$$(٨ ، ٢) (٦ ، ٢) (٥ ، ٢) (٤ ، ٢) (٢ ، ٢)$$

$$(٨ ، ٤) (٦ ، ٤) (٥ ، ٤) (٤ ، ٤) (٢ ، ٤)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 ( ٨ , ٥ ) & ( ٦ , ٥ ) & ( ٥ , ٥ ) & ( ٤ , ٥ ) & ( ٢ , ٥ ) \\
 ( ٨ , ٦ ) & ( ٦ , ٦ ) & ( ٥ , ٦ ) & ( ٤ , ٦ ) & ( ٢ , ٦ ) \\
 ( ٨ , ٨ ) & ( ٦ , ٨ ) & ( ٥ , ٨ ) & ( ٤ , ٨ ) & ( ٢ , ٨ )
 \end{array}$$

وعدد العينات هنا ٢٥ وهو يساوي تماما عدد طرق سحب مفردتين من بين ٥ مفردات عندما يكون السحب مع الإعادة وهو  $٥ \times ٥ = ٢٥$  طريقة .

(د) والمتوسطات الحسابية لهذه العينات هي :

٥	٤	٣ر٥	٣	٢
٦	٥	٤ر٥	٤	٣
٦ر٥	٥ر٥	٥	٤ر٥	٣ر٥
٧	٦	٥ر٥	٥	٤
٨	٧	٦ر٥	٦	٥

والقيم السابقة تمثل مجتمع المتوسطات الحسابية حيث أن أول مفردة هي الوسط الحسابي للعينات الأولى (  $\bar{x} = \frac{٢ + ٢}{٢}$  ) وثاني مفردة هي الوسط الحسابي للعينات الثانية

$$( \bar{x} = \frac{٤ + ٢}{٢} ) \text{ وهكذا .}$$

(هـ) و يكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\bar{x} = \frac{١٢٥}{٢٥} = \frac{٨ + ٧ + ٥ + ٣ر٥ + ٣ + ٢}{٢٥} = (\bar{x})$$

وهي نفس قيمة  $\mu$  .

(و) وكذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\sigma = (\bar{x}) \sqrt{\frac{٢(٥-٨)^2 + ٢(٥-٧)^2 + \dots + ٢(٥-٣ر٥)^2 + ٢(٥-٣)^2 + ٢(٥-٢)^2}{٢٥}}$$

$$\sqrt{٢} \sqrt{٧} =$$

(ز) وللمقارنة بين كل من  $\mu$ ،  $\mu(\bar{x})$  وكذلك بين  $\sigma$  و  $\sigma(\bar{x})$

نجد أن :

$$\mu = \mu(\bar{x}) \text{ حيث أن كل منهما } = ٥$$

$$\sqrt{2} = \sigma \quad , \quad \sigma = (\bar{s}) \quad \sqrt{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = (\bar{s}) \quad \therefore$$

المثال السابق يعتبر مثالا عن حالة سحب عينة من مجتمع محدود ولكن السحب مع الإعادة أي أن كل مفردة يمكن تكرار تمثيلها في العينة مثل العينات:

$$(8, 8) - (6, 6) - (5, 5) - (4, 4) - (2, 2)$$

كما أن المفردتين (2, 2) يعتبران عينة والمفردتين (4, 2) يعتبران عينة أخرى وهذه الحالة نعاملها معاملة المجتمعات غير المحدودة كما ذكرنا سابقا عند الكلام عن المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة أما حالة السحب بدون إعادة فتعتبر كحالة السحب من مجتمع محدود لذلك لا بد لنا من مناقشة حالة السحب بدون إعادة من مجتمعات محدودة لمعرفة الفرق بين الحالتين.

فيما سبق ذكرنا في حالة السحب من مجتمع غير محدود أن متوسط مجتمع المتوسطات  $\mu(\bar{s})$  هو نفسه متوسط المجتمع الأصلي  $\mu$  أي أن  $\mu = \mu(\bar{s})$

كذلك وجدنا أن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات  $\sigma(\bar{s})$  يساوي الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي  $\sigma$  مقسوما على  $\sqrt{n}$  أي أن  $\sigma(\bar{s}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ولكن الحال يختلف عند السحب بدون إعادة من مجتمع محدود له حجم معين وليكن  $n$ . سنجد أن الوسط الحسابي لمجتمع المتوسطات يساوي الوسط الحسابي للمجتمع الأصلي مثل الحالة السابقة تماما— ولكن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات في هذه الحالة يساوي الانحراف المعياري مقسوما على  $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$  ومضروبا في عامل معين هو  $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$

حيث  $n$  هي حجم المجتمع،  $v$  هي حجم العينة أي أن

$$\sigma(\bar{s}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

ولتوضيح الفرق بين الحالتين سنقدم المثال التالي:

مثال (3): نفرض أن لدينا نفس المجتمع الموجود في المثال السابق والذي مفرداته: 2، 4، 5، 6، 8.

والمطلوب:

(أ) حساب متوسط المجتمع الأصلي  $\mu$ .

(ب) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي  $\sigma$ .

- (ج) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها بدون إرجاع .  
 (د) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة .  
 (هـ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية  $\mu_{(3)}$  .  
 (و) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية  $\sigma_{(3)}$  .  
 (ز) قارن بين  $\mu_{(3)}$  و  $\mu_{(2)}$  وكذلك بين  $\sigma_{(3)}$  و  $\sigma_{(2)}$  .

### الحل

(أ)  $\mu = 5$  كما في المثال السابق

(ب)  $\sigma = \sqrt{2}$  كما في المثال السابق

(ج) العينات التي حجم كل منها  $n = 2$  والتي يمكن سحبها بدون إعادة هي :

( ٢ ، ٨ ) ( ٢ ، ٦ ) ( ٢ ، ٥ ) ( ٢ ، ٤ )

( ٤ ، ٨ ) ( ٤ ، ٦ ) ( ٤ ، ٥ ) ( ٤ ، ٤ )

( ٥ ، ٨ ) ( ٥ ، ٦ ) ( ٥ ، ٤ )

( ٦ ، ٨ )

ويجب ملاحظة أنه عند سحب العينة نقوم أولاً بسحب مفردة ثم نحتفظ بها ونسحب مفردة أخرى غيرها فلا يمكن أن يكون لدينا مثلاً عينة (٢، ٢) أو (٤، ٤) كما أن العينة (٢، ٤) هي نفس العينة (٤، ٢) أي لا نعتبرهما عينتين مختلفتين كما في المثال السابق .

(د) وبحساب المتوسط الحسابي لكل عينة نحصل على مجتمع المتوسطات في الصورة التالية :

٣	٣.٥	٤	٥
٤.٥	٥	٦	
٥.٥	٦.٥		
٧			

(هـ) ويكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\mu = \frac{٣ + ٣.٥ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧}{١٠} = ٥$$

وهو نفس متوسط المجتمع الأصلي .

(و) ويكون كذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\sqrt{\frac{2(5-7) + \dots + 2(5-30) + 2(5-2)}{10}} = (\bar{s})\sigma$$

$$\sqrt{10} =$$

(ز) وللمقارنة بين  $\mu$  و  $\mu_{(s)}$  وكذلك بين  $\sigma$  و  $\sigma_{(s)}$

نجد أن:  $\mu = \mu_{(s)} = 5$   
كما أن:

$$(\bar{s})\sigma = \sqrt{10} = \sqrt{\frac{2-5}{1-5}} \sqrt{\frac{2}{27}} = \sqrt{\frac{2-5}{1-5}} \sqrt{\frac{\sigma}{27}}$$

$$\therefore (\bar{s})\sigma = \sqrt{\frac{2-5}{1-5}} \sqrt{\frac{\sigma}{27}}$$

(٥-٥) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية:

حتى الآن لم نتعرض لتوزيع مجتمع المتوسطات الحسابية - كل ما تعرضنا له هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ولكن شكل ونوع التوزيع الاحتمالي نفسه يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات. وفيما يلي بعض النظريات الإحصائية التي تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية نذكرها بدون إثبات وذلك لأننا سوف نستخدمها كثيرا في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي:

نظرية (١): إذا كان لدينا مجتمع نرمز لمفرداته بالرمز  $s$  يتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  وسحبنا منه عينات حجم كل منها  $n$  فإن الوسط الحسابي  $\bar{s}$  للعينات يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu_{(s)} = \mu$  وانحرافه المعياري:

$$\left. \begin{aligned} &\text{إذا كان المجتمع كبيرا} \\ &\text{إذا كان المجتمع الأصلي محدودا وحجمه } n \end{aligned} \right\} (\bar{s})\sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \sqrt{\frac{2-5}{1-5}}$$

مثال (٤): إذا كان أطوال طلاب الجامعات يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري



٨ سم — سحبت منه عينة مكونة من ٦٤ طالبا فما احتمال أن يكون متوسط أطوالهم أكبر من ١٧٢ سم؟

الحل

$$\mu = ١٧٠ \text{ سم}$$

$$\sigma = ٨ \text{ سم}$$

$$\mu_{\bar{x}} = (\bar{x}) = \mu = ١٧٠ \text{ سم}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{٨}{\sqrt{٦٤}} = ١ \text{ سم}$$

وحيث أن المجتمع كبير فإن

وحيث أن المجتمع الأصلي س يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ٨ سم فإن مجتمع المتوسطات س يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ١ سم .

والمطلوب حساب  $P(\bar{x} \leq ١٧٢)$  .  
نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{١٧٠ - \bar{x}}{١}$$

$$\text{عندما } \bar{x} = ١٧٢$$

$$\text{فإن } z = \frac{١٧٠ - ١٧٢}{١} = -٢$$

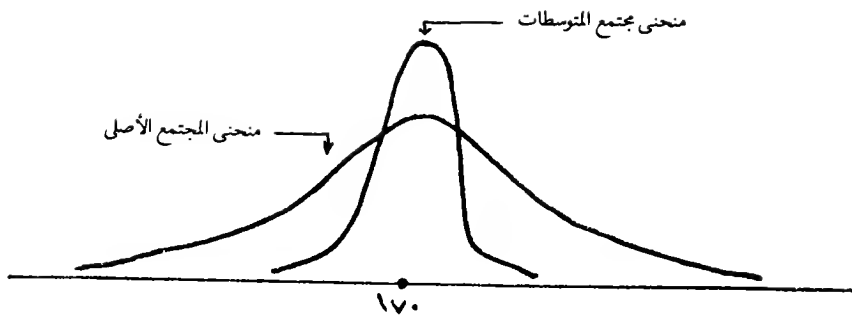
$$\text{إذن } P(\bar{x} \leq ١٧٢) = P(z \leq -٢)$$

$$= ٠ - ٠.٠٥٤ = -٠.٠٥٤$$

$$= ٠.٠٥٤ - ٠.٤٧٧٢$$

$$= ٠.٢٢٨$$

**ملحوظة (١) :** بمقارنة الانحرافين المعياريين لكل من المجتمع الأصلي ومجتمع المتوسطات يبرز مدى تجانس مجتمع المتوسطات عن المجتمع الأصلي ويمكن إيضاح ذلك برسم توزيع المجتمع الأصلي وتوزيع مجتمع المتوسطات في المثال السابق على رسم واحد كما يلي :



نظرية (٢) : إذا كان لدينا مجتمع  $S$  يتبع توزيعا احتماليا وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  سحبنا منه عينات حجمها  $n$  وكانت  $n$  كبيرة فإن الوسط الحسابي  $\bar{x}$  يتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu(\bar{x}) = \mu$  وانحرافه المعياري :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma(\bar{x})$$

إذا كان المجتمع كبيرا

$$\sqrt{\frac{n - 1}{n}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

إذا كان المجتمع محدودا وحجمه  $n$

تسمى هذه النظرية بنظرية النزعة المركزية وهى توضح أن توزيع المتوسطات الحسابية يتبع توزيعا طبيعيا بصرف النظر عن نوع التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي . كل ما نحتاج إليه أن يكون حجم العينة كبيرا وأن يكون المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع محدودا .

ملحوظة (٢) : تعتبر العينة كبيرة إذا زاد حجمها عن ٣٠ مفردة كما أن المجتمع المحدود يجب أن يكون حجمه أكبر من ضعف حجم العينة .

مثال (٥) : إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الاحتمالي التالي :

$$d(x) = 12 - x^2 \quad \text{حيث } 0 \leq x \leq 1$$

سحبت عينة حجمها ١٠٠ مصباح فاحسب احتمال أن متوسط أعمارها يقل عن ٧٥ شهر .

الحل

$$\mu = \int_0^1 x \cdot d(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot d(x) \cdot dx$$

$$\left[ \frac{\frac{0}{5}}{\frac{1}{5}} - \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} \right] 12 =$$

$$12 = \left[ \frac{1}{20} \right] 12 = \text{سنة } 0.6$$

$$\sigma^2 = \left[ \frac{1}{20} \right] 12 = \text{سنة } 0.6$$

$$12 = \left[ \frac{1}{20} \right] 12 = \text{سنة } 0.6$$

$$0.36 = \left[ \frac{1}{20} \right] 12 =$$

$$12 = \left[ \frac{1}{20} \right] 12 =$$

$$0.40 = 0.36 - 0.04 =$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{0.40} = 0.2$$

$$\mu = \bar{x} = 0.6$$

$$\sigma = \frac{0.2}{\sqrt{100}} = \frac{0.2}{10} = 0.02$$

وحيث إن حجم العينة كبير ( $n = 100$ ) فإن  $\bar{x}$  تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه  $0.6$  سنة وانحرافه

المعياري  $0.02$  سنة والمطلوب حساب  $h$  ( $\bar{x} \geq \frac{1}{4} 7$  شهر)

$$\frac{1}{4} 7 \text{ شهر} = \frac{15}{24} \text{ من السنة}$$

$$= 0.625 \text{ سنة}$$

أي أن المطلوب حساب  $h$  ( $\bar{x} \geq 0.625$ )

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$ص = \frac{\bar{س} - ٠.٦}{٠.٠٢}$$

$$\text{عندما } \bar{س} = ٠.٦٢٥$$

$$ص = \frac{٠.٦٢٥ - ٠.٦}{٠.٠٢} = \frac{٠.٠٢٥}{٠.٠٢} = ١.٢٥$$

$$\therefore ح ( \bar{س} \gg ٠.٦٢٥ ) = ح ( ص \gg ١.٢٥ )$$

$$= ٠.٥ + ح ( ص \gg ١.٢٥ )$$

$$= ٠.٥ + ٠.٣٩٤٤$$

$$= ٠.٩٩٤٤$$

مثال (٦): إذا كانت الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق تتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثتين—أخذت عينة مكونة من ٦٤ أسبوعا فما احتمال أن يكون متوسط الحوادث فيها يزيد عن ٢.٢ حادثة؟

الحل

من التوزيع البواسوني نعلم أن:  $\mu = ٢$

$$\sigma^2 = ٢$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{٢}$$

$$\mu = (\bar{س}) = ٢$$

$$\sigma = (\bar{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٦٤}} = \frac{\sqrt{٢}}{٨} = ٠.١٧٧$$

وحيث إن حجم العينة كبير ( $n = ٦٤$ ) فإن  $\bar{س}$  تتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٢ وانحرافه المعياري

$$٠.١٧٧ \text{ والمطلوب حساب } ح ( \bar{س} \leq ٢.٢ )$$

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$ص = \frac{2 - \bar{ص}}{2.177}$$

$$\text{عندما } \bar{ص} = 2.2$$

$$ص = \frac{2.2 - 2}{2.177} = \frac{0.2}{2.177} = 0.092$$

$$ج: (ص \leq 2.2) = (ص \leq 0.092)$$

$$= 0.5 - (ص \geq 0.092) = 0.5 - 0.492 = 0.008$$

$$= 0.5 - 0.492 = 0.008$$

(٥-٦) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب:

عندما تكلمنا عن توزيعات المعاينة في البند (٥-٢) ذكرنا أنها توزيعات احتمالية للمقاييس الإحصائية التي نحسبها من العينات كما ذكرنا أن الوسط الحسابي  $\bar{ص}$  والانحراف المعياري  $\sigma$  للعينة ونسبة المفردات في العينة التي لها صفة معينة هي بعض هذه المقاييس وفي البند السابق حصلنا على التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية والآن نتعرف على التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب وسوف نتبع نفس الأسلوب الذي سلكناه في تقديم التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية.

نفرض أن لدينا مجتمعاً كبيراً ونسبة المفردات التي لها صفة معينة في هذا المجتمع هي  $P$  فإذا سحبنا من المجتمع عينة عشوائية كبيرة من المفردات حجمها  $n$  ووجدنا أن من بينها  $x$  مفردة لها هذه الصفة المعينة الموجودة في المجتمع فإن النسبة  $\frac{x}{n}$  والتي سنرمز لها بالرمز  $\bar{ص}$  تعتبر متغيراً عشوائياً لأنها تتغير من عينة لأخرى. وبالتالي فإن هذه النسبة  $\bar{ص}$  يكون لها توزيع احتمالي تحدده النظرية التالية:

نظرية (٢): إذا كانت  $P$  هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبنا من هذا المجتمع عينات كبيرة حجم كل منها  $n$  وكانت  $\bar{ص}$  تمثل نسبة هذه الظاهرة في العينات فإن  $\bar{ص}$  تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه  $P$  وانحرافه المعياري  $\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

مثال (٧): إذا علم أن نسبة الأحمدة المعبية التي تنتجها إحدى الآلات هي ٣٪ فإذا اشترى أحد المعارض ٤٠٠ حذاء من إنتاج هذه الآلة فما هو احتمال:  
أ - أن يجد ٢٠ حذاء على الأقل معيباً؟

ب- أن يجد ١٦ حذاء على الأكثر معيبا؟

الحل

نسبة الأحذية المعيبة في إنتاج الآلة (المجتمع)  $P = 0.3$

وحجم العينة  $n = 400$

نفرض أن نسبة الأحذية المعيبة في العينة =  $L$

نعلم أن  $L$  تتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $0.3$  وانحرافه المعياري:

$$0.0085 = \frac{0.97 \times 0.3}{\sqrt{400}} \sqrt{P} = \frac{(P-1)P}{n} \sqrt{L} = (L) \sigma$$

أ- والمطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ٢٠ حذاء على الأقل.

$$0.05 = \frac{20}{400} = L \text{ نسبة}$$

في العينة وبهذا يكون المطلوب معرفة احتمال أن تكون نسبة المعيب في العينة  $0.05$  فأكثر أي المطلوب:

$$\text{حساب ح ( } L \leq 0.05 \text{ )}$$

$$\frac{0.3 - L}{0.0085} = \frac{P - L}{(L) \sigma} = \text{ضع : ص}$$

∴ ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا

$$\text{عندما } L = 0.05$$

$$235 = \frac{0.3 - 0.05}{0.0085} = \text{فإن ص}$$

$$\text{∴ ح ( } L \leq 0.05 \text{ ) = ح ( ص } \leq 235 \text{ )}$$

$$= 0.5 - \text{ح ( ص } \geq 235 \text{ )}$$

$$= 0.5 - 0.9906 = 0.0094$$

ب- المطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ١٦ حذاء على الأكثر—

أي أن تكون نسبة الأحذية المعيبة في العينة هي  $L = \frac{16}{400} = 0.04$  على الأكثر. أي المطلوب حساب

$$\text{ح ( } L \geq 0.04 \text{ )}$$

نضع :

$$\frac{p - p_L}{(p_L) \sigma} = v$$

$$\frac{0.03 - p_L}{0.0085} =$$

∴ v تتبع توزيع طبيعي قياسي  
عندما  $p_L = 0.04$

$$فإن v = \frac{0.03 - 0.04}{0.0085} = 1.18$$

$$∴ ح (p_L \geq 0.04) = ح (v \geq 1.18)$$

$$= 0.5 + ح (صفر \geq v \geq 1.18)$$

$$= 0.5 + 0.3810 = 0.8810$$

مثال (٨) : إذا كانت نسبة الطلاب الراسبين في جامعة ما هي ٩% وأخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠٠ طالب. فما هو احتمال أن نجد في هذه العينة ٧٠ طالبا على الأكثر راسبين؟

الحل

نسبة الطلاب الراسبين في الجامعة = ٠.٠٩

وحجم العينة  $n = 1000$  طالب

نفرض أن  $L$  هي نسبة الطلاب الراسبين في عينات حجمها ١٠٠٠ طالب

∴  $L$  تتبع توزيعا طبيعيا وسطه = ٠.٠٩ وانحرافه المعياري

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{1000}} = 0.009$$

وبما أن عدد الطلاب الراسبين في العينة ٧٠ طالبا

نسبة الطلاب الراسبين في العينة = ٠.٠٧

والمطلوب هو حساب:

$$ح (L \geq 0.07)$$

نضع

$$v = \frac{L - p}{\sigma_L} = \frac{0.07 - 0.09}{0.009}$$

∴ ص تتبع توزيع طبيعي قياسي

$$\text{عندما } L = 0.7$$

$$ص = \frac{0.7 - 0.9}{0.09} = \frac{0.2 - 0.9}{0.09} = -2.22$$

$$\therefore ح (L \geq 0.7) = ح (ص \geq -2.22)$$

$$= 0.9 - ح (ص \leq -2.22)$$

$$= 0.9 - 0.0132$$

$$= 0.8868$$

(٥-٧) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق بين متوسطين :

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما:

$$113, 213, \dots$$

$$113, 213, \dots$$

متوسط الأول  $\mu_1$  وتباينه  $\sigma_1^2$  ومتوسط الثاني  $\mu_2$  وتباينه  $\sigma_2^2$  فإذا سحبنا عينة من المجتمع الأول حجمها  $n_1$  مفردة ووجدنا وسطها الحسابي  $\bar{x}_1$  وانحرافها المعياري  $s_1$  وسحبنا عينة من المجتمع الثاني حجمها  $n_2$  مفردة ووجدنا وسطها الحسابي  $\bar{x}_2$  وانحرافها المعياري  $s_2$  نفرض أننا حسبنا الفرق بين الوسطين فوجدنا:

$$F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

نلاحظ أن  $\bar{x}_1$  ما هي إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها  $n_1$  والمسحوبة من المجتمع الأول و  $\bar{x}_2$  ما هي كذلك إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها  $n_2$  مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني، وعلى ذلك فإن  $F$  تعتبر قراءة في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات التي يمكن أخذها من المجتمعين والتي حجمها  $n_1$  مفردة من المجتمع الأول و  $n_2$  من المجتمع الثاني. والنظرية الآتية تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق  $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$  عندما يكون حجم العينات كبيرا.

نظرية (٣): مجتمع الفروق  $F$  يتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $(\mu_1 - \mu_2)$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  (ف)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$



مثال (٩) : مصنعان لإنتاج المصابيح الكهربائية متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ١٥٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ٢٠٠ ساعة بينما متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ١٥٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ١٥٠ مصباحا من المصنع الأول وعينة أخرى حجمها ١٢٥ مصباحا من إنتاج المصنع الثاني لاختبارهما فأوجد:

إحتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ٢٥٠ ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني

الحل

$$\mu_1 = 1500 \text{ ساعة}$$

$$\sigma_1 = 200 \text{ ساعة}$$

$$n_1 = 150 \text{ مصباح}$$

$$\mu_2 = 1200 \text{ ساعة}$$

$$\sigma_2 = 150 \text{ ساعة}$$

$$n_2 = 125 \text{ مصباح}$$

نفرض أن  $\bar{X}_1$  هي متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الأول و  $\bar{X}_2$  هي متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الثاني .

$$\therefore F = (\bar{S}_1 - \bar{S}_2)$$

F تتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $(\mu_1 - \mu_2)$  وانحرافه المعياري هو:

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1500)^2}{125} + \frac{(200)^2}{150}} = 21 \text{ ساعة} .$$

و يكون المطلوب حساب:

$$H_0: F \leq 250$$

$$\text{نضع } V = \frac{F - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(F)} = \frac{250 - 21}{21}$$

حيث V تعتبر متغيرا طبيعيا قياسيا .

عندما F = 250

$$ص = \frac{250}{21} - \frac{300}{21} = \frac{50}{21} = 2.38$$

$$\therefore ح (ف < 250) = ح (ص < 2.38)$$

$$= 0.05 + ح (صفر > 2.38) =$$

$$= 0.05 + 0.4910 = 0.991$$

ملحوظة (٣): إذا كانت العيتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط (أي أن  $\mu = \mu$ ) فإن مجتمع الفروق يكون له توزيع طبيعي وسطه الصفر وانحرافه المعياري  $\sigma$  (ف) [حيث أن  $\sigma$  (ف) كما هي معرفة سابقا].

### (٥-٨) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع الانحرافات المعيارية:

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا من المفردات له توزيع طبيعي وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  ونفرض أننا سحبنا عينات حجم كل منها  $n$  من هذا المجتمع وحسبنا التباين  $s^2$  لكل عينة - حيث:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (s - \bar{s})^2$$

،  $s$  هي مفردات العينة

نجد أن قيمة  $s^2$  تتغير من عينة لأخرى وعلى ذلك فإن  $s^2$  متغير عشوائي له توزيع احتمالي تعطيه النظرية الآتية:

نظرية (٤):  $\frac{s^2}{\sigma^2}$  متغير عشوائي يتبع توزيع  $\chi^2$  بدرجات حرية  $(n-1)$ . و يعتبر التوزيع الاحتمالي للمقدار  $\frac{s^2}{\sigma^2}$  من التوزيعات الاحتمالية التي يتطلب منا استخدامها المباشر في النواحي التطبيقية دراسة في نظرية الاحتمالات أعمق مما يمكن تقديمه على مستوى هذا الكتاب - لهذا نكتفي بذكر هذا التوزيع كما هو موضح في الفقرة السابقة وذلك حتى يمكن الاستفادة منه في الباب التالي عندما نتكلم عن تقدير فترة ثقة لتباين المجتمع  $\sigma^2$ .

\*\*\*

## تمارين

- ١ مجتمع مكون من المفردات ٦، ٩، ١١، ١٥، ١٧  
احصر كل العينات الممكنة سحبها (مع الإرجاع) من هذا المجتمع والتي حجم كل منها مفردتان ثم أوجد:  
أ — متوسط المجتمع وانحرافه المعياري .  
ب — متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وانحرافه المعياري .  
ج — تحقق من صحة نتائجك بمقارنة النتائج في أ، ب .
- ٢ حل التمرين السابق إذا كان سحب مفردات العينة من المجتمع يتم بدون إرجاع .
- ٣ مصنع لإنتاج نوع معين من المصابيح الكهربائية — إذا علم أن متوسط عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع ٨٠٠ ساعة والانحراف المعياري ٦٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ٦٤ مصباحا فما هو احتمال أن متوسط عمر المصباح في العينة:  
أ — ينحصر بين ٧٩٠، ٨١٠ ساعة؟  
ب — يقل عن ٧٨٥ ساعة؟  
ج — يزيد عن ٨٢٠ ساعة؟
- ٤ وصل إلى أحد مستودعات للتخزين نوع معين من الطرود متوسط وزن كل منها ٨٠ كيلو جرام وانحرافه المعياري ١٦ كيلو جرام — فإذا وضع عشوائيا ٢٥ طردا على مصعد داخل المخزن لرفعها إلى مكان تخزينها . فما هو احتمال أن لا تزيد هذه الحمولة عن الوزن المسموح به للمصعد وقدره ٢٢٠٠ كيلو جرام؟
- ٥ إذا كانت نسبة المواليد الذكور في مجتمع ما هي ٥١ ر، فما هو احتمال أن نحصل على:  
أ — أقل من ٤٥% ذكور؟  
ب — ما بين ٤٥% إلى ٦٠% إناث؟  
ج — أكثر من ٥٥% ذكور؟  
وذلك في ٢٠٠ حالة ولادة.
- ٦ حل التمرين السابق إذا كان عدد الولادات ١٠٠ ولادة بدلا من ٢٠٠ — موضحا الفرق بين النتائج في الحالتين .
- ٧ اشترى تاجر ١٠٠٠ صندوق تفاح من أحد مراكز توزيع الفاكهة والمعروف أن ٥% من التفاح الذي يعبئه هذا المركز فاسد . فما هو العدد المتوقع للصناديق التي تحتوي على:  
أ — أكثر من ٩٠ تفاحة جيدة؟

ب— ٩٨ تفاحة أو أكثر جيدة؟

علما بأن كل صندوق يحتوي على ١٠٠ تفاحة .

٨ — ألتان للانتاج — معلوم لدينا أن متوسط عدد الوحدات التي تنتجها الآلة الأولى ٤٠٠٠ وحدة في اليوم الواحد بانحراف معياري ٣٠٠ وحدة والمتوسط اليومي لعدد الوحدات المنتجة بالآلة الثانية ٤٥٠٠ وحدة بانحراف معياري ٢٠٠ وحدة— أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ يوم من إنتاج الآلة الأولى وعينة أخرى حجمها ٥٠ يوما من إنتاج الآلة الثانية— فما احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي إنتاج الآلتين (في العينتين) :

أ — ٦٠٠ وحدة على الأقل؟

ب — ٤٥٠ وحدة على الأكثر؟

٩ — في أحد اختبارات الذكاء لمجموعة كبيرة من الطلاب كان متوسط الدرجات ٧٥ درجة والانحراف المعياري ٨ درجات— اخترنا عشوائيا مجموعتين من هؤلاء الطلاب حجم المجموعة الأولى ٣٠ طالبا وحجم المجموعة الثانية ٤٠ طالبا— فما هو احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي الدرجات في المجموعتين :

أ — ثلاث درجات أو أكثر؟

ب — منحصر بين درجتين وستة درجات؟

ج — خمسة درجات أو أقل؟

\*\*\*

## الباب السادس

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة  
(العينات الكبيرة)



# تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة

## (العينات الكبيرة)

### (١-٦) — معالم المجتمع وإحصاءات العينة:

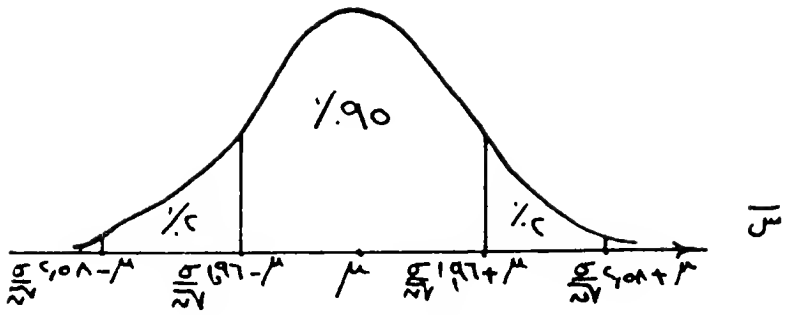
كما نعلم أن الهدف الأساسي من دراسة مجتمع ما هو إيجاد أو تقدير بعض خصائصه مثل المتوسط  $\mu$  والانحراف المعياري  $\sigma$  ونسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع  $P$  وغير ذلك من أدلة توصيف المجتمعات — وهذه الخصائص تعتبر من أهم المعالم التي تحدد شكل كل مجتمع ولذلك فهي تسمى بمعالم المجتمع أو بارامترات المجتمع (parameters) — وهي ثوابت لأن قيمتها ثابتة لا تتغير. وهذه المعالم غالباً ما تكون مجهولة ونرغب في معرفة قيمتها.

وحيث أن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة من المجتمع فإننا نلجأ دائماً إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة وذلك من بيانات العينة والمقياس المحسوب من العينة يسمى إحصاء (Statistic). ولكل إحصاء أسلوب خاص في حسابه سنتكلم عنه فيما بعد — والإحصاءات المناظرة للمعالم  $\mu, \sigma, P$  هي الوسط الحسابي للعينة  $\bar{x}$  والانحراف المعياري للعينة  $s$  ونسبة الظاهرة في العينة  $\bar{p}$  على الترتيب. والإحصاء يعتبر متغيراً لأنه يتغير من عينة لأخرى. فمثلاً الوسط الحسابي الذي نحصل عليه من عينة ما يختلف عن ذلك الذي نحصل عليه من عينة أخرى حتى ولو كانت العينتان مسحوبتين من مجتمع واحد.

وحيث أن الإحصاءات متغيرات فإن لكل منها توزيعاً احتمالياً معيناً. فمثلاً قد وجدنا أن الإحصاء  $\bar{x}$  متغير عشوائي له توزيع احتمالي طبيعي عندما يكون حجم العينة كبيراً.

### (٢-٦) — تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة:

نفرض أن لدينا مجتمعاً كبيراً وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  ونرغب في معرفة القيمة المجهولة لمتوسط هذا المجتمع — لذلك ن سحب عينة عشوائية كبيرة حجمها  $(n < 30)$  مفردة ونحسب من هذه العينة الوسط الحسابي  $\bar{x}$  والانحراف المعياري  $s$ . كما نعلم فإن الإحصاء  $\bar{x}$  في هذه الحالة يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . والآن نستخدم هذا التوزيع الاحتمالي في تقدير متوسط المجتمع  $\mu$ . ويمكن رسم منحني هذا التوزيع كما يلي:



ومن خصائص التوزيع الاحتمالي السابق نعرف أن:

احتمال أن تقع  $\bar{x}$  بين  $\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ،  $\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  يساوي ٠.٩٥

أي أن احتمال أن تختلف  $\bar{x}$  عن  $\mu$  بمقدار  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  بالزيادة أو بالنقص يساوي ٠.٩٥ .  
ويمكن كتابة ذلك على النحو التالي:

$$P \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (\bar{x} - \mu) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (\bar{x} + \mu) \right] = 0.95$$

وهذا يعطي لنا حدين ، حد أعلى وحد أدنى تقع بينهما  $\mu$  كما يحدد لنا قيمة احتمالية نوضح لنا مدى ثقتنا في أن تقع  $\mu$  بين هذين الحدين . وتسمى القيمة الاحتمالية بدرجة الثقة كما يسمى الحد  $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  بحد الثقة الأدنى والحد  $(\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  بحد الثقة الأعلى والفترة بينهما تسمى فترة الثقة : و يسمى المقدار ١.٩٦ بالدرجة المعيارية وهي قيمة المتغير الطبيعي القياسي (ص) المناظر للاحتمال ٠.٩٥

$$\text{بمعنى أن } P \left( \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 0.95$$

وحيث أن ص = ٢.٥٨ تناظر احتمال ٠.٩٩ فيمكن استبدال القيمة ١.٩٦ بالقيمة ٢.٥٨ واستبدال درجة الثقة ٠.٩٥ بدرجة الثقة ٠.٩٩ وبهذا نحصل على فترة الثقة التالية:

$$P \left( \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 0.99$$

وبصفة عامة يمكن استخدام أي قيمة للتوزيع الطبيعي القياسي (ص) غير القيمتين ١.٩٦ ، ٢.٥٨ وهذا يترتب عليه تغيير درجة الثقة . والصيغة العامة لفرات الثقة هي:



$$z = \frac{(\bar{x} - \mu) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{حيث أن: } (1 - \alpha) \text{ هي درجة الثقة.}$$

،  $\sigma$  هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي المناظر لدرجة الثقة  $(1 - \alpha)$  .  
 فإذا أردنا استخدام درجة ثقة ٩٥% فإن  $\sigma = ١.٩٦$  . وكذلك عند درجة الثقة ٩٩% نجد أن  $\sigma = ٢.٥٨$  .

ويمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد قيمة  $\sigma$  المناظرة لأي درجة ثقة نرغبها .

**ملحوظة (١):** عند تقدير  $\mu$  باستخدام فترات الثقة السابقة نجد أننا نحتاج لمعرفة  $\sigma$  التي عادة تكون مجهولة لذلك نستخدم الانحراف المعياري للعينة  $\bar{s}$  بدلا من  $\sigma$  كنوع من التقريب .

**مثال (٨) :** مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية . سحبت من إنتاجه عينة عشوائية حجمها ١٠٠ مصباح . فإذا كان متوسط عمر المصباح في العينة هو ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري هو ٢٥٠ ساعة فماذا تستنتج عن متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع كله ؟

الحل

$$\bar{s} = ١٢٠٠ , \quad \sigma = ٢٥٠$$

نفرض أن  $\mu$  متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع .  
 عند درجة ثقة ٩٥% يكون :

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{حيث أن } \sigma \text{ مجهولة نستخدم } \bar{s} \text{ بدلا منها وعلى ذلك فإن:}$$

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{حيث أن } \sigma \text{ مجهولة نستخدم } \bar{s} \text{ بدلا منها وعلى ذلك فإن:}$$

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{حيث أن } \sigma \text{ مجهولة نستخدم } \bar{s} \text{ بدلا منها وعلى ذلك فإن:}$$

$$\therefore z = [ 1101 \geq \mu \geq 1249 ] = 0.90$$

ومعنى هذا أننا نتوقع أن يتراوح عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع بين ١١٥١ ساعة و١٢٤٩ ساعة وأتأكد في هذا القرار بدرجة ثقة ٠.٩٥

**ملحوظة (٢) :** فترات الثقة السابقة كلها خاصة بالمجتمعات الكبيرة ولكن إذا كان المجتمع محدوداً فإننا نستبدل الانحراف المعياري للوسط الحسابي  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  بما يناظره في حالة المجتمعات المحدودة وهو  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}$  وعلى ذلك فإن فترات الثقة في حالة المجتمعات المحدودة تكون كالآتي:

$$z = \left[ \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \right]$$

$$1 - \alpha = \left[ \frac{n-1}{n-2} \right]$$

حيث أن :  $n$  هي حجم المجتمع

،  $n-1$  هي حجم العينة

**مثال (٨) :** سحبت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ طالباً من طلبة كلية الاقتصاد والإدارة البالغ عددهم ألف طالب. فإذا كان متوسط عمر الطالب في العينة ٢٠ سنة والانحراف المعياري ٣ سنوات فأوجد بدرجة ثقة ٩٩٪ متوسط عمر الطالب في الكلية.

**الحل**

$$\bar{x} = 20 , \quad s = 3$$

$$n = 1000 , \quad n-1 = 999$$

وعلى ذلك فإن:

$$z = \left[ \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \right]$$

$$0.99 = \left[ \frac{n-1}{n-2} \right]$$

$$\therefore \text{ح} [20 - 2058 \sqrt{\frac{3}{50}} \sqrt{\frac{950}{999}}] \geq \mu \geq \sqrt{\frac{3}{50}} \sqrt{\frac{950}{999}} \times 2058 + 20$$

$$0.99 = \left[ \frac{950}{999} \sqrt{\frac{3}{50}} \right]$$

$$\therefore \text{ح} [20 - 1.07] \geq \mu \geq [20 + 1.07] = 0.99$$

$$\therefore \text{ح} [18.93 \leq \mu \leq 21.07] = 0.99$$

أي أن متوسط عمر الطالب في الكلية يتراوح بين ١٨٩٣ عاما و ٢١٠٧ عاما تقريبا وذلك بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٩): سحبت عينة مكونة من ٥٠ طالبا من طلبة كلية الاقتصاد والادارة البالغ عددهم ألف طالب وكان توزيع أعمار الطلبة في العينة كما يلي:

فئات العمر بالسنوات	١٧ -	١٩ -	٢١ -	٢٣	٢٥ - ٢٧	المجموع
عدد الطلبة	١٣	٢٥	٦	٤	٢	٥٠

والمطلوب: تقدير متوسط العمر بدرجة ثقة ٩٩%.

نبدأ أولا بإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري من بيانات العينة كما يلي:

فئات العمر	عدد الطلبة ك	مراكز الفئات س	س - ٢٠	$\frac{س - ٢٠}{٢} = \text{ح}$	ح × ك	ح × ٢
١٧ -	١٣	١٨	٢ -	١ -	١٣ -	١٣ -
١٩ -	٢٥	٢٠	صفر	صفر	صفر	صفر
٢١ -	٦	٢٢	٢	١	٦	٦
٢٣ -	٤	٢٤	٤	٢	٨	٨
٢٥ - ٢٧	٢	٢٦	٦	٣	٦	٦
المجموع	٥٠				٧	٥٣

$$\bar{س} = 20 + 2 \times \frac{7}{50} = 20.28 = 20.28 \text{ سنة}$$

$$\text{ع} = 2 \times \sqrt{\left( \frac{7}{50} \right) - \frac{53}{50}}$$

$$\sqrt{1.04} \times 2 = \sqrt{1.02 - 1.06} \times 2 =$$

$$2.04 = 1.02 \times 2 = \text{سنة}$$

والآن يمكن استكمال الحل كما في المثال السابق تماما حيث أن:

$$\overline{m} = 2028, \quad c = 204$$

$$n = 1000, \quad h = 50$$

وعلى ذلك يكون :

$$c [ \sqrt{\frac{50 - 1000}{1 - 1000}} \sqrt{\frac{204}{50}} \times 2058 - 2028 ] \geq m \geq 2058 + 2028$$

$$0.99 = [ \sqrt{\frac{50 - 1000}{1 - 1000}} \sqrt{\frac{204}{50}} \times$$

$$c [ 0.73 - 2028 ] \geq m \geq 0.73 + 2028 ] 0.99 =$$

$$c [ 1955 \geq m \geq 2101 ] 0.99 =$$

أي أننا نتوقع أن ينحصر متوسط عمر الطالب في الكلية بين ١٩٥٥ عاما و ٢١٠١ عاما ودرجة ثقتنا في هذا القرار هي ٩٩٪.

### (٦-٣) - تقدير نسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع :

أحيانا يكون من المرغوب فيه معرفة نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما مثل نسبة الأميين في مدينة كبير - أو نسبة العاطلين في الدولة - أو نسبة الذكور في بلدا أو ما شابه ذلك .

في هذه الحالة يمكن استخدام بيانات العينة لتقدير هذه النسبة في المجتمع . تماما مثل حالة الوسط الحسابي - ولإيضاح ذلك سنرمز للنسبة في المجتمع بالرمز  $P$  والنسبة المحسوبة من العينة بالرمز  $p$  . وكما تكلمنا عن نظرية النزعة المركزية نود أن نذكر أنه يوجد نظرية أخرى تسمى نظرية الأعداد الكبيرة للعالم الإحصائي «دى موافر» وفيما يلي نص هذه النظرية :

**نظرية (١) :** إذا كانت  $P$  هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبت منه عينات كبيرة حجم كل منها  $n$  وكانت  $p$  هي نسبة هذه الظاهرة في العينات فإن  $p$  تتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $P$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  (ل) .

حيث إن:

$$\left\{ \frac{(P-1)P}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right\} = \sigma (J) \quad \text{إذا كان المجتمع كبيراً}$$

$$\left\{ \frac{(P-1)P}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right\} = \sigma (J) \quad \text{إذا كان المجتمع محدوداً وحجمه } n.$$

وعادة عند حساب  $\sigma (J)$  نستخدم نسبة الظاهرة في العينة ل بدلا من النسبة  $P$  حيث تكون  $P$  عادة مجهولة وعلى هذا يمكن استخدام النظرية السابقة لإيجاد فترة الثقة للنسبة  $P$  على الصورة التالية:

$$c [J - \sigma_{\frac{P}{J}} \times \sigma (J) \leq P \leq J + \sigma_{\frac{P}{J}} \times \sigma (J)] = 1 - \alpha.$$

حيث  $\sigma_{\frac{P}{J}}$  هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي السابق تعريفها.

مثال (١٠): في مصنع لإنتاج الأحذية أخذت عينة عشوائية حجمها  $n=500$  حذاء ووجد أن ١٠٠ حذاء منها معيبة—أوجد بدرجة ثقة ٩٥٪ نسبة المعيب في الإنتاج كله.

الحل

عند درجة الثقة ٩٥٪ تكون  $\sigma_{\frac{P}{J}} = 1.96$

نسبة المعيب في العينة  $L = \frac{100}{500} = 0.2$

حجم العينة  $n = 500$

نفرض أن نسبة المعيب في الإنتاج كله  $P$

$$\therefore \sigma (J) = \frac{(P-1)P}{n}$$

وحيث أن  $P$  مجهولة لذلك نستخدم النسبة  $L$  بدلا من  $P$  كنوع من التقريب في تقدير  $\sigma (J)$  وبذلك تكون

$$\sigma (J) = \frac{(J-1)J}{n} = \frac{(100-1)100}{500} = 19.8$$

وحيث أن:

$$c [J - \sigma_{\frac{P}{J}} \times \sigma (J) \leq P \leq J + \sigma_{\frac{P}{J}} \times \sigma (J)] = 1 - \alpha$$

$$\therefore c [100 - 1.96 \times 19.8 \leq P \leq 100 + 1.96 \times 19.8] = 0.95$$

$$\therefore \text{ح} [0.165 \leq P \leq 0.235] = 0.95$$

أي نتوقع أن تقع  $P$  بين 0.165 ، 0.235 وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال (١١): أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ رجل من إحدى القرى الصغيرة ووجد أن نسبة الأميين فيها 75% فما الذي تستنتجه عن نسبة الأميين من الرجال في القرية كلها إذا علمت أن عدد رجال القرية ٥٠٠ رجل؟

الحل

نستخدم مثلاً درجة ثقة 99% فتكون  $n = 208$  والنسبة في العينة  $L = 75$  وحجم العينة  $N = 100$

نفرض أن نسبة الأميين بين رجال القرية  $P$  وحيث أن المجتمع حجمه ٥٠٠ فرد فهو مجتمع محدود وعلى هذا تكون

$$\sigma (L) = \sqrt{\frac{L(L-1)}{n} \times \frac{n-L}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{208 \times 207}{100} \times \frac{100-75}{100-1}} = 0.039$$

$$\therefore \text{ح} [L - \sigma (L) \leq P \leq L + \sigma (L)] = 208 - 0.039 \leq P \leq 208 + 0.039$$

$$= 0.99$$

$$\therefore \text{ح} [0.75 - 0.039 \times 208 \leq P \leq 0.75 + 0.039 \times 208] = 0.99$$

$$= 0.99$$

$$\therefore \text{ح} [0.165 \leq P \leq 0.85] = 0.99$$

أي نتوقع أن تنحصر نسبة الأميين لرجال القرية بين 65% ، 85% وذلك بدرجة ثقة 99%.

ملحوظة (٣): عندما نقول أن درجة الثقة في نتيجة معينة 95% يكون معنى ذلك أن 95% من العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأصلي تعطي مثل هذه النتيجة.

(٦-٤) — إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين:

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين المجتمع الأول متوسطه  $\mu_1$  وانحرافه المعياري  $\sigma_1$  والمجتمع الثاني متوسطه  $\mu_2$  وانحرافه المعياري  $\sigma_2$  ونفرض أن متوسطي المجتمعين مجهولان ولا يهمنا معرفة كل منهما على حدة ولكن يهمنا تقدير الفرق بينهما أي نرغب في تقدير  $(\mu_1 - \mu_2)$  بفترة ثقة مناسبة.

ويمكننا إيجاد فترة الثقة المطلوبة وذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ — نسحب عينة كبيرة حجمها  $n_1$  من المجتمع الأول ثم نحسب متوسطها الحسابي  $\bar{x}_1$  وانحرافها المعياري  $s_1$ .

ب — نسحب عينة كبيرة حجمها  $n_2$  من المجتمع الثاني ونحسب متوسطها الحسابي  $\bar{x}_2$  وانحرافها المعياري  $s_2$ .

ج — نعلم من نظرية (٣) في البند (٥-٧) أن الفرق

$$F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \text{ يتبع توزيع طبيعي وسطه } (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\text{وانحرافه المعياري : } \sigma(F) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\text{وعلى ذلك فإن } \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = V$$

يتبع توزيعاً طبيعياً قياسياً.

د — من خواص التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$P[-1.96 \leq V \leq 1.96] = 0.95$$

وهذا الاحتمال يكافئ:

$$P[-1.96 \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \leq 1.96] = 0.95$$

$$P[-1.96 \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq 1.96 \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}] = 0.95$$

وهذا يوضح أن احتمال أن تختلف  $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$  عن  $(\mu_1 - \mu_2)$

بمقدار ١٩٦ ( ف )  $\sigma$  بالزيادة أو النقص يساوى ٠.٩٥ .

أى احتمال أن تنحصر (  $\mu_1 - \mu_2$  ) بين ف -

١٩٦ ( ف )  $\sigma$

، ف + ١٩٦ ( ف )  $\sigma$  يساوى ٠.٩٥ .

هذه العبارة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$c [f - 196 \sigma (\mu_1 - \mu_2) \geq \mu_1 - \mu_2 \geq 196 \sigma (\mu_1 - \mu_2)]$$

$$0.95 = [f + 196 \sigma (\mu_1 - \mu_2)]$$

أى نستطيع القول بأن الفرق بين متوسطي المجتمعين (  $\mu_1 - \mu_2$  )

ينحصر بين ف  $\pm$  ١٩٦ ( ف )  $\sigma$  وذلك بدرجة ثقة ٩٥ %

وعلى ذلك تكون فترة الثقة المطلوبة هى :

$$f - 196 \sigma (\mu_1 - \mu_2) , f + 196 \sigma (\mu_1 - \mu_2)$$

بدرجة ثقة ٩٥ %

وإذا أردنا إيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة ٩٩ % فكما نعلم نستبدل ١٩٦ بالقيمة ٢٥٨ .

وبصفة عامة يمكن كتابة فترة الثقة في الصورة الآتية :

$$c [f - \mu_{\alpha/2} \sigma (\mu_1 - \mu_2) \geq \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_{\alpha/2} \sigma (\mu_1 - \mu_2)]$$

$$\alpha - 1 = [f + \mu_{\alpha/2} \sigma (\mu_1 - \mu_2)]$$

حيث أن :

(  $\alpha - 1$  ) هى درجة الثقة

،  $\mu_{\alpha/2}$  هى قيمة المتغير الطبيعي القياسي التي تحصر على يمينها مساحة قدرها  $\frac{\alpha}{2}$  .

وبذلك يكون :

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = f - \mu_{\alpha/2} \sigma (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\text{الحد الأعلى لفترة الثقة} = f + \mu_{\alpha/2} \sigma (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\alpha - 1 = \text{درجة الثقة}$$

حيث أن :

$$f = \bar{s}_1 - \bar{s}_2$$



$$\frac{\frac{1}{2}\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{2}\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = (f) \sigma$$

ملحوظة (١) : عادة تكون  $\sigma$ ،  $\sigma$  مجهولتان لذلك فإننا في مثل هذه الحالات نستخدم بدلا منهما الانحراف المعياري للعينة الأولى  $\bar{\sigma}$  والانحراف المعياري للعينة الثانية  $\bar{\sigma}$  على الترتيب.

مثال (١٢) : أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بهاء ٥٠ تلميذا والثانية بها ١٠٠ تلميذ واستعملت طريقة خاصة لتدريس الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى بينما استعملت طريقة أخرى عادية للمجموعة الثانية. وفي نهاية الدورة الدراسية وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٤ درجات بينما كان متوسط المجموعة الثانية ٦٠ درجة والانحراف المعياري ٥ درجات— كَوْن لنا فكرة واضحة عن مدى تأثير الطريقة الخاصة في التدريس وذلك بإنشاء فترة ثقة مناسبة للفرق بين المتوسطين.

الحل

$$\begin{array}{lll} \bar{\sigma} = 50 & \bar{\sigma} = 65 \text{ درجة} & \bar{\sigma} = 4 \text{ درجات} \\ \sigma = 100 & \sigma = 60 \text{ درجة} & \sigma = 5 \text{ درجات} \end{array}$$

إذا اخترنا درجة الثقة ٩٥٪ فإن فترة الثقة تكون كما يلي:

$$\therefore f = 65 - 60 = 5$$

$$\sigma (f) = \frac{25}{1.0} + \frac{16}{0.5} \sqrt{2} = 0.775$$

$$\therefore \text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = f - 1.96 \sigma (f)$$

$$= 5 - 1.96 \times 0.775$$

$$= 3.48 \text{ درجة}$$

$$= 5 + 1.96 \times 0.775 \text{ ، الحد الأعلى لفترة الثقة}$$

$$= 6.48 \text{ درجة}$$

$$\therefore \text{ح} [ 3.48 \leq \bar{\sigma} - \bar{\sigma} \leq 6.48 ] = 0.95$$

وهذا يبين لنا بوضوح أنه بدرجة ثقة ٩٥٪، تؤدي الطريقة الخاصة إلى رفع متوسط درجات الرياضة المعاصرة بمقدار يتراوح بين ثلاثة درجات ونصف إلى ستة درجات ونصف.

كذلك إذا استخدمنا درجة الثقة ٩٩٪ فسوف نجد أن ارتفاع الدرجات يتراوح بين ٣١ درجة إلى ٦٩ درجة.

## (٥-٦) - تقدير تباين المجتمع من بيانات العينة:

في بعض الدراسات الإحصائية نجد أنفسنا بحاجة إلى معرفة تباين المجتمع  $\sigma^2$  وكثيرا ما يكون هذا التباين مجهولا غير معروف لنا. لهذا نلجأ إلى بيانات العينة لتقدير تباين المجتمع. فمثلا عند تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة استطعنا إيجاد فترات ثقة مناسبة كما هو مبين في البند (٢-٦) ولكن كانت فترات الثقة تعتمد على الانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$ ، وأحيانا تكون  $\sigma$  مجهولة لذلك أشرنا في ملحوظة (١) بند (٢-٦) أننا في مثل هذه الحالة نستخدم الانحراف المعياري للعينة  $s$  كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  - أي أننا نستخدم تباين العينة  $s^2$  كتقدير لتباين المجتمع  $\sigma^2$ . وهذا التقدير يسمى التقدير بنقطة - أي أننا من بيانات العينة يمكننا الحصول على قيمة عددية وحيدة لتباين العينة  $s^2$  واعتبرناها تقديرا لتباين المجتمع. أي أن التقدير بنقطة هو التقدير بقيمة عددية وحيدة وهو تقدير مقبول وجيد و يستخدم في كثير من الدراسات الإحصائية - ولكننا الآن نرغب في إيجاد فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  كما فعلنا في حالة متوسط المجتمع.

لكي نحصل على فترات الثقة المرغوبة نتذكر الآتي:

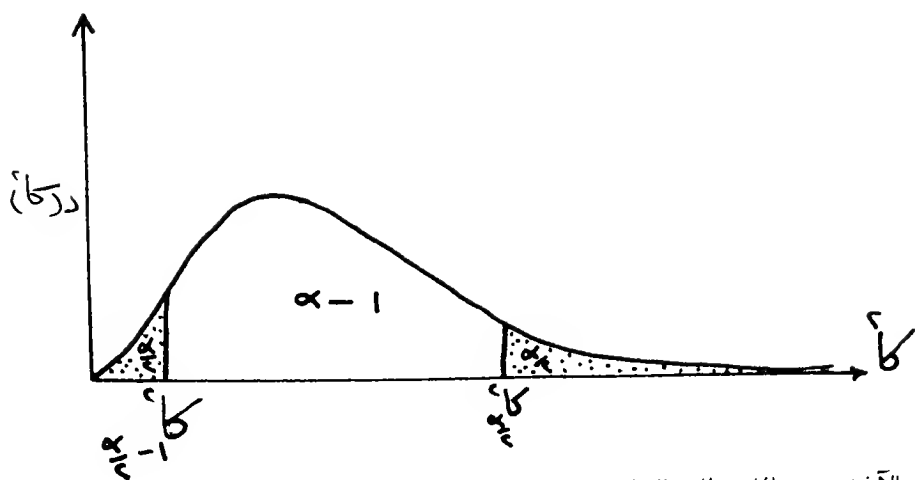
أ - نعلم أنه إذا سحبنا عينة حجمها  $n$  من المشاهدات المستقلة  $s, s, \dots, s$  من مجتمع طبيعي وسطه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$  فإن:  $\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{\sigma^2}$  تعتبر متغيرا عشوائيا يتبع توزيع كاي<sup>٢</sup> بدرجات حرية  $(n-1)$ ، حيث أن:

ع<sup>٢</sup> =  $\frac{1}{n} \chi^2_{(n-1)}$  هي تباين العينة. وذلك دون التقييد بضرورة أن تكون العينة كبيرة.

ب - نعلم من معلوماتنا عن توزيع كاي<sup>٢</sup> كما يتضح من البند (٣-٩) أن:

$$c \left[ \frac{\chi^2_{1-\alpha}}{n} \leq \frac{\chi^2_{\alpha}}{n} \right] = 1 - \alpha$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



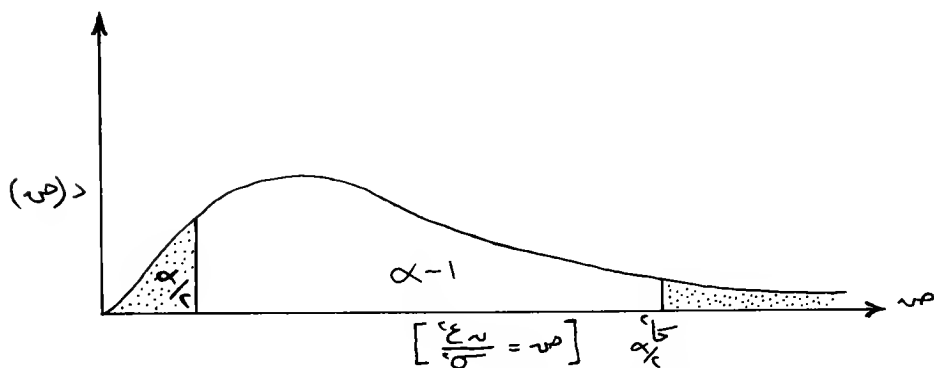
والآن نستخدم الملاحظات السابقة:

حيث أن:

$$\frac{1}{\sigma^2} (\bar{s} - s) \leq \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\epsilon^2 n}{\sigma^2} = v$$

يتبع توزيع  $\chi^2$  بدرجات حرية  $(n-1)$  فإن:

$$1 - \alpha = \left[ \frac{\chi_{\alpha/2}^2}{n} \leq \frac{\epsilon^2 n}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{n} \right] \quad \text{ع}$$



ولكن الاحتمال السابق يكافئ الاحتمال:

$$1 - \alpha = \left[ \frac{1}{\frac{\chi_{\alpha/2}^2}{n} - \frac{1}{\sigma^2}} \leq \frac{1}{\frac{\epsilon^2 n}{\sigma^2}} \leq \frac{1}{\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{n}} \right] \quad \text{ع}$$

وهذا يكافئ :

$$\alpha - 1 = \left[ \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \right] \quad \text{ح}$$

علما بأن درجات الحرية  $n-1$  . وهذا يعطي فترة ثقة لها الحدان التاليان :

$$\frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$\frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} = \text{والحد الأعلى لفترة الثقة}$$

$$\alpha - 1 = \text{درجة الثقة}$$

وهذه تسمى فترة ثقة مركزية بمعنى أن مستوى المعنوية  $\alpha$  منقسم إلى قسمين متساويين  $\frac{\alpha}{2}$  في الذيل الأيمن من توزيع  $\chi^2$  ، في الذيل الأيسر كما هو واضح من الرسم السابق حيث نجد أن المساحتين المظلتين متساويتان وكل منهما تساوي  $\frac{\alpha}{2}$  .

فمثلا إذا أردنا استخدام درجة الثقة  $\alpha - 1 = 95\%$  سيكون مجموع المساحتين المظلتين في الرسم السابق 5% وعلى هذا يمكن تحديد فترة الثقة باستخدام  $\chi^2_{0.025}$  ،  $\chi^2_{0.975}$  فتكون فترة الثقة هي :

$$0.95 = \left[ \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \right] \quad \text{ح}$$

وكذلك إذا استخدمنا درجة ثقة 99% فإننا نحدد فترة الثقة باستخدام  $\chi^2_{0.005}$  ،  $\chi^2_{0.995}$  وتكون فترة الثقة هي :

$$0.99 = \left[ \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V_E}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - 1}} \right] \quad \text{ح}$$

مثال (١٣) : سحبت عينة حجمها ١٦ طالبا من طلبة إحدى المدارس وقيست أوزانهم فوجد أن الانحراف المعياري لأوزان الطلاب في العينة ٢ر٤ كيلو جرام . أوجد فترة ثقة للانحراف المعياري لأوزان الطلاب في المدرسة كلها :  
 أولا : باستخدام درجة ثقة ٩٥%  
 ثانيا : باستخدام درجة ثقة ٩٩%

### الحل

عند درجة الثقة ٩٥% ستحدد فترة الثقة من الاحتمال الآتي :

$$0.95 = \left[ \frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right] \leq \sigma \leq \left[ \frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right] \leq 0.95$$

وبما أن حجم العينة  $n = 16$

إذن درجات الحرية  $m = 15$

و يكون :

$$\frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$\frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \text{والحد الأعلى لفترة الثقة}$$

لمعرفة قيمة  $\alpha/2 = 0.025$  نبحث في جدول توزيع كاي عند درجات الحرية  $m = 15$

والاحتمال  $\alpha = 0.05$  أي أنها عند تقاطع الصف  $m = 15$  مع العمود  $\alpha = 0.025$

وسنجد أن كاي  $\alpha/2 = 27.4884$

وبالمثل سنجد كاي  $\alpha/2 = 0.975$  عند تقاطع الصف  $m = 15$  مع العمود  $\alpha = 0.975$  ونحصل على كاي  $\alpha/2 = 0.975$

$$0.975 = 0.975$$

وبهذا تكون فترة الثقة للانحراف المعياري  $\sigma$  هي :

$$\text{الحد الأدنى} = \frac{9.6}{\sqrt{\frac{27.4884}{16}}} = \frac{9.6}{\sqrt{1.718025}} = 7.43$$

$$٣٠٨٤ = \frac{٩٦}{٢٥} = \frac{\sqrt{١٦} \times ٢٠٤}{\sqrt{٦٢٦٢١٤}} = \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٢٠٤}} = \text{والحد الأعلى} = ٠.٩٧٥$$

وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

و بهذا يمكن القول أن الانحراف المعياري لأوزا طلبة المدرسة جميعهم ينحصر بين ١٨٣ ، ٣٠٨٤ كيلوجرام وأن درجة ثقتنا في هذا الكلام هو ٩٥٪

ثانياً : بأسلوب مماثل لما اتبعناه في أولاً ولكن باستخدام درجة ثقة ٩٩ . سنجد أن فترة الثقة يمكن تحديدها من الاحتمال الآتي :

$$٠.٩٩ = \left[ \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٢٠٤}} \gg \sigma \gg \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٢٠٤}} \right] \text{ ح}$$

ومن جدول كا<sup>٢</sup> نجد أنه عند درجات الحرية م = ١٥ يكون :

$$٣٢.٨٠١٣ = \text{كا}^2_{٠.٠٥}$$

$$٤٦.٠٠٩٤ = \text{كا}^2_{٠.٩٩}$$

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = \frac{٩٦}{٥٧٢٢} = \frac{\sqrt{١٦} \times ٢٠٤}{\sqrt{٥٧٢٢}} = \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٣٢.٨٠١٣}} = ١.٦٧٦$$

$$\text{والحد الأعلى لفترة الثقة} = \frac{٩٦}{٢١٤٤٩٨} = \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٤٦.٠٠٩٤}} = ٤.٤٧٦$$

إذن عند درجة الثقة ٩٩٪ نجد أن الانحراف المعياري للمجتمع ينحصر بين ١.٦٧٦ ، ٤.٤٧٦ كيلوجرام .

نلاحظ أنه كلما زادت درجة الثقة كلما اتسعت فترة الثقة — فعندما كانت درجة الثقة ٩٥٪ كانت فترة الثقة (١٨٣ — ٣٠٨٤) بينما أصبحت درجة الثقة ٩٩٪ أصبحت فترة الثقة (١.٦٧٦ ، ٤.٤٧٦) وبهذا تكون الزيادة في الثقة على حساب دقة الفترة نفسها .

## الباب السابع

### اختبار الفروض الإحصائية





# اختبار الفروض الإحصائية

(١٧-١) — مقدمة :

تعتبر نظرية التقدير واختبارات الفروض الإحصائية من أهم الطرق الإحصائية بصفة عامة . وقد ناقشنا في الباب السادس طريقة تقدير بعض معالم المجتمع مثل متوسط المجتمع — الانحراف المعياري للمجتمع — ونسبة ظاهرة معينة في المجتمع — أما هذا الباب فسيخصص للتعرف على مبادئ اختبارات الفروض الإحصائية دون الدخول في التفاصيل الأساسية وسنتكلم عن الفرض الإحصائي وعن الاختبار الإحصائي وكيفية إجرائه . ولتوضيح هذه المفاهيم نأخذ مثالا من الواقع .

كما نعلم في كثير من الحالات العملية وفي مجالات العمل المختلفة قد يجد الإنسان نفسه في موقف معين يتطلب منه اتخاذ قرار بناء على معلومات معينة وطبيعي أن يتخذ هذا القرار بشيء من الحكمة وبأقل قدر ممكن من المخاطر إذ أن هذا القرار قد يترتب عليه نفقات قد تكون طائلة و بالتالي لا بد أن يكون لها ما يبررها . فمثلا نفرض أن مصنعا لإنتاج بعض أنواع المعلبات يستخدم نوعا معيناً من الآلات لتعبئة الإنتاج النهائي في علب معدنية وكان معلوما لدى مدير المصنع أن متوسط عدد الوحدات التي تعبئها الآلة من هذا النوع هو ١٥٠ علبة في الساعة ونفرض أنه ظهر في الأسواق نوع جديد من آلات التعبئة وادعى منتج هذا النوع من الآلات أن الآلة تقوم في المتوسط بتعبئة عدد أكبر من العلب في الساعة عما تقوم به الآلة من النوع الأول . في مثل هذه الحالات قد يرغب مدير المصنع استبدال الآلات الموجودة في مصنعه بآلات من النوع الجديد ولكن هذا القرار سوف يترتب عليه تحميل المصنع نفقات كبيرة تتمثل في الاستغناء عن الآلات الموجودة وشراء آلات جديدة قد تكون بمبالغ طائلة بالإضافة إلى تعطيل المصنع فترة لتركيب الآلات الجديدة . لهذا لا بد لمدير المصنع أولا أن يتأكد من أن متوسط الإنتاج للآلات من النوع الجديد أعلى فعلا من النوع القديم وليس أمامه إلا طريقة واحدة هي أن يجرب آلة من النوع الجديد وذلك بتشغيلها عدة ساعات ( كعينة ) ويحصر عدد الوحدات المنتجة في كل ساعة وكذلك متوسط عدد الوحدات في كل العينة — نفرض أنه وجد أن متوسط عدد الوحدات المنتجة هو ١٧٠ علبة في الساعة — فهل معنى ذلك أن النوع الجديد يعطي وحدات أكبر من النوع الأول أم أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة .

إذا استطاع مدير المصنع أن يعرف بطريقة ما وبشيء من الثقة أن هذا الفرق لا يمكن أن يكون راجعا إلى مجرد الصدفة فإن معنى ذلك أن الآلة من النوع الجديد تقوم فعلا بتعليب عدد أكبر من الوحدات في المتوسط عما تقوم به الآلة من النوع الأول و بالتالي يكون من الحكمة اتخاذ قرار بتغيير الآلات . أما إذا ظهر لنا بأسلوب ما أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة وحدها وأن النوع الجديد من الآلات لا يعطي وحدات أكبر من النوع الأول فلا داعي إذن لاستبدال الآلات .

من المثال السابق يمكننا التعرف على معنى كل من المفاهيم التالية :

أ — الفرض الإحصائي .

ب — اختبار الفرض الإحصائي .

ج — درجة الثقة .

ج — مستوى المعنوية .

إن ادعاء منتج النوع الجديد من الآلات بأن متوسط عدد الوحدات التي تعيها الآلة من هذا النوع أكبر من متوسط عدد الوحدات للنوع الأول — هذا الادعاء يسمى فرضاً إحصائياً لأنه يفترض أن متوسط عدد الوحدات للآلة من النوع الجديد أكبر من ١٥٠ وحدة وهو متوسط العدد للآلة من النوع الأول كما أن الأسلوب أو الطريقة التي بواسطتها يستطيع مدير المصنع الحكم على صحة هذا الفرض تسمى بالاختبار الإحصائي للفرض .

إن الاختبار الإحصائي لفرض ما هو مجموعة من القواعد تمكنا من قبول أو رفض هذا الفرض . ومقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى درجة الثقة — كما أن مقدار عدم الثقة يسمى مستوى المعنوية .

إن المواقف التي نكون فيها بصدد اتخاذ قرار ما هي مواقف كثيرة ومتعددة وما المثال السابق إلا واحد من هذه المواقف — فمثلاً قد يكون من المطلوب بناء على بيانات عينة أن نقرر ما إذا كان دواء جديد له تأثير فعال ومفيد في علاج مرض معين أو إذا كانت طريقة معينة لتدريب العمال تؤدي إلى رفع كفاءتهم الإنتاجية أو مدى تأثير السمنة على حياة الإنسان أو مدى تأثير التدخين في زيادة احتمال الإصابة بمرض السرطان أو غير ذلك . ولكن في كل حالة يكون مطلوب منا تنفيذ ثلاث خطوات هي :

(أ) صياغة الفرض الإحصائي .

(ب) إجراء الاختبار الإحصائي بأسلوب معين .

(ج) اتخاذ القرار إما بقبول أو رفض الفرض وذلك بدرجة ثقة معينة .

وستتكمّل بصورة سريعة عن كل خطوة من الخطوات الثلاث السابقة لإلقاء بعض الضوء عليها .

(أ) صياغة الفرض الإحصائي :

دائماً نصيغ الفرض الإحصائي بصورة معاكسة تماماً للحالة التي نريد اختبارها — فمثلاً في حالة التفرقة بين نوعين من الآلات تستخدم في الإنتاج وكان هناك ادعاء أن متوسط إنتاج الآلة من النوع الثاني أكبر من متوسط إنتاج الآلة من النوع الأول و يراد إجراء اختبار إحصائي لهذا الادعاء فإننا نفترض دائماً حسن النية ونبدأ بوضع الفرض الإحصائي الآتي :

## تمارين

١ — الجدول التالي يوضح توزيع عينة من الأسر في إحدى القرى حسب الإنفاق اليومي بالريال

فئات الانفاق بالريال	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	المجموع
عدد الأسر	١٠	١٣	١٥	٢٥	١٧	١٢	٨	١٠٠

والمطلوب تقدير متوسط الإنفاق اليومي في هذه القرية وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪ في الحالتين الآتيتين:

أولاً : إذا كانت هذه القرية كبيرة

ثانياً: إذا كانت هذه القرية صغيرة وعدد الأسر فيها ٣٠٠ أسرة.

٢ — حل التمرين السابق مع اعتبار درجة ثقة ٩٩٪.

٣ — عينة عشوائية مكونة من ٦٤ صماماً أليكترونيا عاشت في المتوسط ٨٥٠ ساعة مع انحراف معياري ٤٨ ساعة. أوجد فترة ثقة باحتمال ٩٥٪ لمتوسط أعمار جميع الصمامات.

٤ — مصنع ينتج قضباناً حديدية، أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٥٠ قضيب من إنتاج هذا المصنع وقيست أطوالها فكانت كما يأتي:

الطول بالملليمتر	٩٨٠	٩٩٠	١٠٠٠	١٠١٠	١٠٣٠	١٠٣٠	المجموع
عدد القضبان	١٩	٣٢	٥١	٢٥	١٤	٩	١٥٠

ما الذي تستنتجه عن الوسط الحسابي لطول القضيب في الإنتاج الكلي لهذا المصنع؟

٥ — تحتفظ شركة ببيانات عن الإنتاج اليومي لكل من عمالها وتضع هذه البيانات في اعتبارها عند النظر في زيادة أجور هؤلاء العمال. وعند النظر في حالة أحد العمال أعطيت البيانات التالية عن إنتاجه في التسعين يوماً الأخيرة على اعتبار أن هذه البيانات عينة عشوائية من إنتاجه العام.

ما الذي تستنتجه من هذه البيانات عن الوسط الحسابي لإنتاج هذا العامل؟

عدد الوحدات المنتجة في اليوم	١٧٠	١٨٠	١٩٠	٢٠٠	٢١٠	٢٢٠	المجموع
عدد الأيام	٩	١٦	٢٥	٢٠	١٢	٨	٩٠

٦ — الجدول التالي يبين توزيع عينة من ١٣٠٠ من عمال المحال التجارية بحسب أعمارهم .

فئات الأعمال بالسنة	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	٦٠ الى أقل من ٧٠	المجموع
عدد العمال	٢٨٨	٣٩٧	٢٩٩	١٨٢	١٠٢	٢٢	١٣٠٠

باستخدام بيانات الجدول السابق استنتج :

أ — نسبة عمال التجارة الذين تقل أعمارهم عن ٣٠ سنة في المجتمع كله

ب — نسبة عمال التجارة الذين تبلغ أعمارهم ٥٠ سنة فأكثر في المجتمع كله .

ج — عدد عمال التجارة الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٠ ، ٤٠ سنة .

وذلك إذا علمت أن عدد عمال التجارة في المجتمع كله هو ١٥٠ ألف عامل .

٧ — إذا عرفنا الأسر الصغيرة بأنها الأسر المكونة من ٣ أفراد أو أقل والأسر المتوسطة بأنها الأسر

التي يتراوح عدد أفرادها بين ٤ ، ٦ أفراد والأسر الكبيرة بأنها تلك التي يزيد عدد أفرادها عن

٦ أفراد . فاستعمل بيانات الجدول التالي في إيجاد نسبة الأسر من كل من هذه الأحجام

الثلاثة في المجتمع الذي أخذت منه العينة .

« الجدول التالي يبين توزيع ٥٠٠ أسرة بحسب عدد الأفراد »

عدد الافراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	١٨	٣٩	٧١	١٠٢	١٤٧	٨٦	٣٠	٧	٥٠٠

٨ — مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية سحبت منه عينة مكونة من عشرة مصابيح ووجد أن

الانحراف المعياري لعمر المصباح في العينة ١٢٠ ساعة — قدر بفترة ثقة مناسبة الانحراف

المعياري لعمر المصباح في إنتاج المصنع وذلك :

أ — بدرجة ثقة ٩٥ %

ب — بدرجة ثقة ٩٩ %

٩ — حل التمرين السابق إذا كان حجم العينة ٢٥ مصباحا والانحراف المعياري ١٢٠ ساعة كما

هو .

«نفترض عدم وجود اختلاف بين متوسطي الإنتاج للنوعين من الآلات» ويسمى هذا الفرض بفرض العدم ونرمز له بالرمز  $F_0$  ثم نجري الاختبار وتكون نتيجة الاختبار إما قبول  $F_0$  أو رفضه فإذا كان القرار قبول  $F_0$  كان معنى ذلك أنه لا يوجد اختلاف بين متوسطي الإنتاج في النوعين من الآلات وأن الاختلاف الموجود لدينا هو اختلاف ظاهري نتيجة للصدفة وحدها ودائما في الواقع يقابل فرض العدم  $F_0$  فرض معاكس له يسمى الفرض البديل و يرمز له بالرمز  $F_1$  فإذا كان فرض العدم هو:

«عدم وجود اختلاف» — يكون الفرض البديل  $F_1$  هو:

«وجود اختلاف حقيقي وليس ظاهري». وقبول فرض العدم  $F_0$  معناه الفرض البديل  $F_1$  — ورفض فرض العدم يكون معناه أنه لا يوجد لدينا من المبررات ما يكفي لرفض الفرض البديل  $F_1$  وفي هذه الحالة لا يكون في وسعنا إلا قبوله .

### (ب) إجراء الاختبار الإحصائي :

دائما نجري الاختبار لرفض أو قبول فرض معين نبدأ به ونسميه فرض العدم  $F_0$  — ثم نسحب عينة عشوائية ومن بيانات العينة نحسب إحصاء معين مثل المتوسط ( $\bar{x}$ ) أو النسبة ( $p$ ) أو الانحراف المعياري ( $\sigma$ ) أو أي دالة معينة في أحد هذه الإحصاءات أو غير ذلك .

والخطوات التالية لتلقي مزيدا من الضوء على كيفية إجراء الاختبار الإحصائي :

١ — نفرض أن لدينا مجتمعا ما يتبع توزيعا احتماليا معيناً وأن هذا التوزيع الاحتمالي يعتمد على بعض المعالم (مثل متوسط التوزيع  $\mu$  أو الانحراف المعياري  $\sigma$  أو نسبة ظاهرة معينة في هذا المجتمع  $p$ ).

٢ — نفرض أن المطلوب اختبار فرض عدم معين في حول أحد هذه المعالم أو أي دالة فيها .

٣ — نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمة التي يدور حولها الفرض أو دالة في هذا التقدير وسبق أن أوضحنا في بند (٦-١) أن الإحصاء ما هو إلا متغير عشوائي يتبع توزيعا معيناً .

٤ — باعتبار أن فرض العدم صحيح نبحث عن التوزيع الاحتمالي لهذا الإحصاء ونقوم برسم شكل التوزيع الاحتمالي للإحصاء باعتبار أن المحور الأفقي هو قيم الإحصاء والمحور الرأسي يمثل دالة الاحتمال علما بأن جميع الإحصاءات التي سوف نتناولها لها توزيعات احتمالية سبق دراستها .

٥ — بناء على درجة الثقة المطلوبة يمكن تقسيم محور المتغير العشوائي (محور الإحصاء) إلى منطقتين إحداهما تسمى منطقة القبول والأخرى تسمى منطقة الرفض . حيث أن المساحة أسفل منحنى التوزيع وأعلى منطقة القبول تساوي درجة الثقة، بينما المساحة أسفل منحنى التوزيع، وأعلى منطقة الرفض تسمى مستوى المعنوية .

٦ — نسحب عينة عشوائية من المجتمع ومنها نحسب القيمة المشاهدة لهذا الإحصاء ونحاول رصد هذه القيمة على المحور الأفقي الذي يمثل قيم الإحصاء — سنجد — أن هذه القيمة إما أن تقع في منطقة القبول أو تقع في منطقة الرفض .

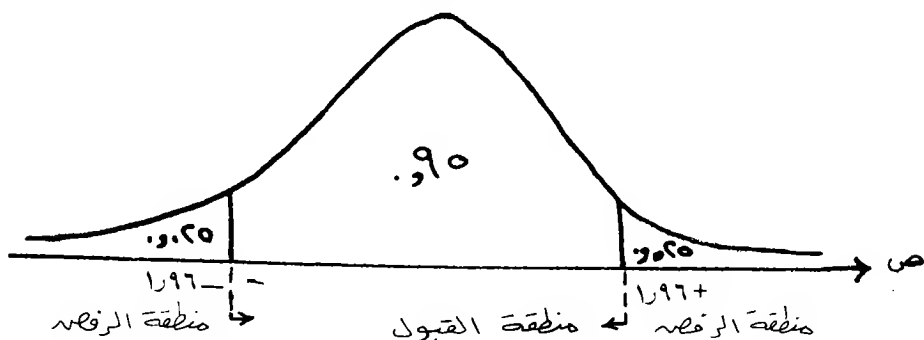
### (ج) اتخاذ القرار:

إذا وقعت القيمة المشاهدة للإحصاء والمحسوبة من بيانات العينة في منطقة القبول ، فإننا نقبل فرض العدم فب بدرجة الثقة المحددة وعلى ذلك نرفض البديل فـ — أما إذا وقعت القيمة المشاهدة في منطقة الرفض كان معنى ذلك أننا نرفض فـ أو بمعنى آخر ليس لدينا المبرر الكافي لرفض ف وفي هذه الحالة نقبل الفرض البديل فـ .

فمثلا لو كان الإحصاء الذي نستخدمه في إجراء الاختبار هو الوسط الحسابي  $\bar{x}$  وكان فرض العدم هو:

فـ: توزيع المعاينة للإحصاء  $\bar{x}$  هو توزيع معتمد توقعه  $\mu$  /  $(\sigma)$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  /  $(\sigma)$  .

فكما سبق أن أوضحنا في الباب الخامس أن المتغير  $Z = \frac{(\bar{x} - \mu) / \sigma}{(\sigma / \sqrt{n})}$  له توزيع طبيعي قياسي ويمكن رسم منحنى هذا التوزيع وتحديد درجة الثقة ٩٥% في الرسم كما يلي :

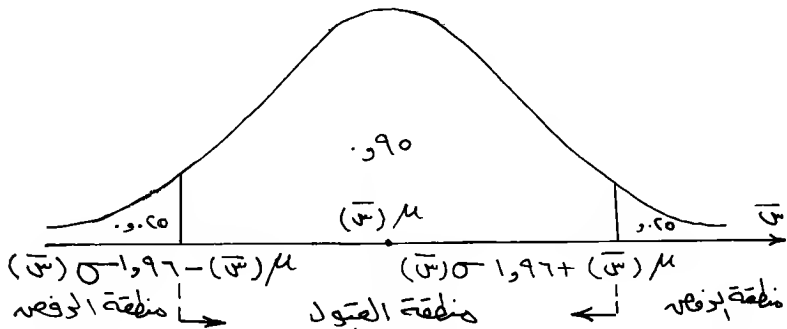


وكما يتضح من الرسم أنه إذا كان فرض العدم ف صحيحا سوف نكون واثقين بدرجة ٩٥% أن القيمة المشاهدة للمتغير ص والمحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول . أي أن ص لن تقل عن ١٩٦ — ولن تزيد عن ١٩٦+ إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمالها ٥% . وعلى هذا لوحسبنا قيمة ص من بيانات العينة المسحوبة ووجدنا أن قيمة ص تقع خارج المنطقة من ١٩٦ — إلى ١٩٦+ فإننا نستبعد أن يكون فرض العدم صحيحا ونحصل على مثل هذه النتيجة في ٥% من الحالات وبناء على ذلك نرفض ف ونقول أن قيمة ص تختلف معنويا عما هو متوقع بناء على صحة الفرض ف وأن مستوى المعنوية ٥% . أما إذا وقعت قيمة ص في الفترة (١٩٦ — ، ١٩٦+) فنقول أن قيمة ص المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع وبالتالي فإننا نقبل ف. وذلك بدرجة ثقة ٩٥% .

من الواضح أنه يمكننا استخدام درجة ثقة ٩٩٪ أو أي درجة ثقة نرغب فيها . كذلك بناء على صياغة فرض العدم يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل آخر فنحن نعلم أن فرض العدم في متعلق بالإحصاء  $\bar{S}$  كما يلي :

ف : توزيع المعاينة للإحصاء  $\bar{S}$  هو توزيع طبيعي توقعه  $\mu$  ( $\bar{S}$ ) وانحرافه المعياري  $\sigma$  ( $\bar{S}$ ) .

وعلى هذا يمكن رسم توزيع المتغير  $\bar{S}$  مباشرة حسب معلوماتنا من فرض العدم عند درجة الثقة ٩٥٪ سيكون الرسم كما في الشكل التالي :



فإذا كان فرض العدم صحيحا سنكون واثقين بدرجة ٩٥٪ أن القيمة المشاهدة للمتغير  $\bar{S}$  المحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول . أي أن  $\bar{S}$  لن تقع خارج المنطقة من  $\mu$  ( $\bar{S}$ ) - ١.٩٦  $\sigma$  ( $\bar{S}$ ) إلى  $\mu$  ( $\bar{S}$ ) + ١.٩٦  $\sigma$  ( $\bar{S}$ ) إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمال حدوثها ٥٪ . لهذا فإننا نحسب المتوسط  $\bar{S}$  من بيانات العينة فإذا وقعت القيمة المحسوبة للمتغير  $\bar{S}$  في منطقة القبول نقول أن  $\bar{S}$  المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع بناء على افتراض صحة  $H_0$  ، لهذا فإننا نقبل  $H_0$  بدرجة ثقة ٩٥٪ أي أننا نرفض أي فرض مرادف  $H_0$  يختلف عن  $H_0$  . والعكس صحيح إذا وقعت  $\bar{S}$  المشاهدة في منطقة الرفض .

وما هو جدير بالذكر أن الاختبار الموضح أعلاه سواء باستخدام المتغير  $\bar{S}$  أو المتغير  $S$  يعتمد على وضع منطقة الرفض على جانبي منطقة القبول أي في ذيلي التوزيع ، لهذا فإن الاختبار من هذا النوع يسمى الاختبار ذو الذيلين ولكن يوجد اختبار ذو ذيل واحد وذلك إذا جعلنا كل مستوى المعنوية  $\alpha$  في أحد الذيلين أي جعلنا منطقة الرفض في ذيل واحد وليس في الذيلين .

## (٧-٢) - اختبار فرض معين حول توقع المجتمع :

إذا كان لدينا مجتمع ما يتبع توزيعا احتماليا معيناً - وأخذنا من هذا المجتمع عينة

عشوائية كبيرة حجمها  $n$  وحسبنا وسطها الحسابي  $\bar{x}$  وانحرافها المعياري  $s$  فيمكننا أن نختبر أي فرض إحصائي حول توقع المجتمع  $\mu$  وذلك عن طريق حساب المقدار:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = z$$

وذلك باتباع الخطوات الموضحة في البند السابق (٧-١) — وذلك بتحديد توزيع المتغير  $z$  بناء على صحة الفرض المراد اختباره وتحديد منطقتي الرفض والقبول لمستوى المعنوية المطلوب — فإذا وقعت قيمة  $z$  المشاهدة في منطقة الرفض نرفض الفرض أما إذا وقعت في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض والمثال التالي يوضح لنا ذلك.

**مثال (١) :** شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية يدعى صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط ١٥ كيلو جرام بانحراف معياري نصف كيلو جرام.

ولاختبار صحة ادعاء الصانع أخذت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ خيطاً وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة ١٤٫٨ كيلو جرام. فهل يمكننا تأييد ادعاء المدير. (استخدم درجة ثقة ٩٩٪).

### الحل

يمكن صياغة الحل في الخطوات الآتية:

أ — صياغة الفرض الإحصائي

ف. :  $\mu = 15$  كجم

وف. كما يتضح هو فرض العدم — أي افتراض عدم وجود اختلاف بين المتوسط الحقيقي و بين المتوسط الذي يدعيه الصانع.

وفي هذه الحالة يمكن افتراض أن الفرض البديل هو:

ف. :  $\mu \neq 15$  كجم .

ب — إجراء الاختبار الإحصائي .

١ — لهذا نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمة  $\mu$  — هذا الإحصاء هو  $\bar{x}$  . وكما

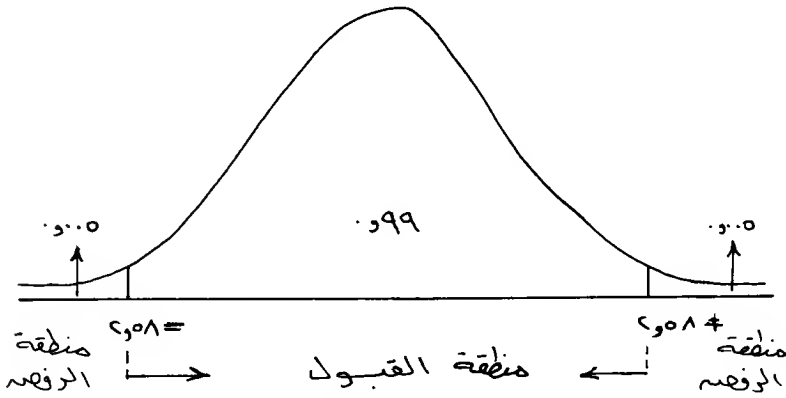


نعلم أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

تعتبر دالة في هذا الإحصاء

- ٢ — باعتبار أن فرض العدم (ف) صحيح يكون ص له توزيع معتاد قياسي .  
 ٣ — عند درجة الثقة ٩٩% وباستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع المعتاد القياسي يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض كما في الشكل التالي:



- ٤ — نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة نجد أنها:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث  $\bar{X} = 1488$  كجم

$$\sigma = 0.0 \text{ كجم}, \mu = 0.0$$

$$Z = \frac{10 - 1488}{\frac{0.0}{\sqrt{10}}} = 283$$

ج — اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة ص المشاهدة أقل من - 283 (وهي أقل قيمة في منطقة القبول) أي أن ص المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو:

«رفض ف» .

ونستنتج من ذلك أن متوسط قوة تحمل الخيط  $\mu$  لا تساوي ١٥ كجم حيث أن قيمة ص الملاحظة تقع في الجانب الأيسر من منطقة الرفض — بل أكثر من ذلك يمكننا استنتاج أن  $\mu$  أقل من ١٥ كجم .

في بعض الأحيان يكون من المطلوب اختبار الفرض القائل أن متوسط المجتمع  $\mu$  يساوي قيمة معينة  $\mu_0$  . مثلاً وذلك في مقابل الفرض البديل ف:  $\mu < \mu_0$  أو  $\mu > \mu_0$  . وفي هذه الحالة يمكن تكوين اختبار إحصائي يسمى اختبار ذو ذيل واحد — وذلك بوضع منطقة الرفض في ذيل واحد من التوزيع الاحتمالي أما الذيل الأيمن أو الذيل الأيسر .

مثال (٢) : في عينة عشوائية مكونة من تسجيل ١٠٠ حالة وفاة في قرية معينة تبين أن متوسط العمر في العينة ٦٧٫٥ عاماً والانحراف المعياري ٨ أعوام . فهل هذا يوضح أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من ٦٥ عاماً ؟

استخدم مستوى معنوية ٥٪ .

### الحل

نفرض أن  $\mu$  متوسط العمر في هذه القرية .

أ — صياغة الفرض الإحصائي .

فرض العدم ف:  $\mu = 65$  عاماً .

الفرض البديل ف:  $\mu < 65$  عاماً .

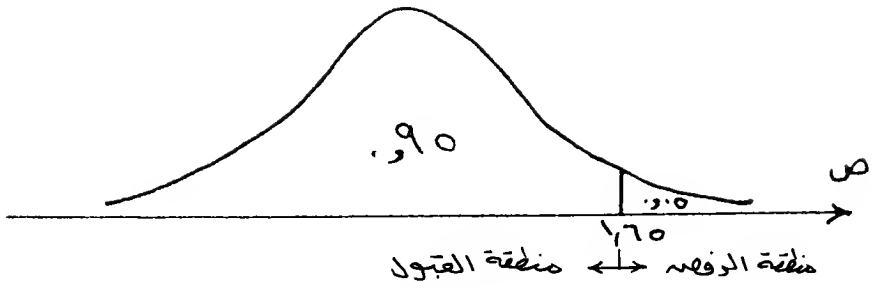
ب — إجراء الاختبار الإحصائي .

$$١ - \text{نعلم أن ص} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

لها توزيع طبيعي قياسي

٢ — عند درجة الثقة ٩٥٪ و باستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع الطبيعي القياسي يمكن تحديد

منطقة القبول أو الرفض كما في الشكل التالي بحيث تكون منطقة الرفض هي الذيل الأيمن للتوزيع .



أي أن منطقة الرفض هي المنطقة التي فيها  $ص < 165$   
 ٣ - من بيانات العينة نجد أن:

$$\bar{x} = 67.5 \text{ عاما}$$

$$s \approx 8 \text{ أعوام}$$

$$n = 100 \text{ مفردة}$$

$$\text{إذن قيمة } ص \text{ المشاهدة} = \frac{65 - 67.5}{\frac{8}{\sqrt{100}}} = \frac{2.5}{0.8} = 3.125$$

ج - اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة  $ص$  المشاهدة أكبر من 165 لهذا فإن  $ص$  المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو رفض  $H_0$ .

ونستنتج من ذلك أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من 65 عاما أي أن  $H_0$  هو الفرض الصحيح المقبول.

ويمكن من المثال السابق ملاحظة أنه لا اختبار أن  $\mu$  أقل من قيمة معينة يمكن عمل نفس الاختبار ولكن مع وضع منطقة الرفض في الذيل الأيسر. وذلك لأن تحديد منطقة الرفض يتوقف على الفرض البديل.

(٧-٣) - اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع  $P$ :

في كثير من الحالات العملية نجد أنفسنا محتاجين لاختبار فرض معين حول نسبة معينة في مجتمع ما.

فمثلا قد يحتاج السياسي لمعرفة نسبة الذين سوف ينتخبوه في الانتخاب القادم  $P$ . كذلك قد تحتاج الشركات الصناعية لمعرفة نسبة التألف  $P$  في بضاعتها بسبب الشحن مثلا وغير ذلك الكثير من الحالات العملية.

في مثل هذه الحالات يكون الاهتمام منصبا على النسبة  $P$  للظاهرة محل الدراسة .

وقد سبق لنا في الباب السادس في البند (٦-٣) أن تكلمنا عن إنشاء فترة الثقة للنسبة  $P$  .  
ولكننا الآن سنتناول بالدراسة مشكلة اختبار الفرض الإحصائي القائل بأن النسبة  $P$  تساوي قيمة معينة . أي أننا سوف نختبر فرض العدم  $F_0$  : القائل أن  $P = P_0$  مثلا ضد الفرض البديل  $F_1$  : القائل أن :  $P < P_0$  . أو  $P > P_0$  . أو  $P \neq P_0$  .

عند إنشاء فترة ثقة للنسبة  $P$  في البند (٦-٣) ذكرنا أنه عندما تكون العينة كبيرة تكون النسبة  $P$  في العينة لها تقريبا توزيع معتاد متوسطه  $\mu = P_0$

وانحرافه المعياري  $\sigma = \sqrt{P_0(1-P_0)}$

وعلى هذا يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي والفرض البديل .

نعلم أن

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)}}$$

وذلك باعتبار أن فرض العدم  $F_0$  صحيح

وبناء على ما تقدم وباستخدام مستوى المعنوية  $\alpha$  يمكن رسم منحنى التوزيع الطبيعي القياسي وتحديد منطقتي الرفض والقبول عليه وإجراء الاختبار كما في حالة الوسط الحسابي تماما .  
ولا نجد داعيا هنا لإعادة ذكر الخطوات لأن ذلك يكون تكرارا مملًا لا مبرر له وإنما نكتفي بالمثال التالي :

**مثال (٣) :** يدعى مدير شركة لإنتاج نوع معين من السجائر أن ٢٠٪ من المدخنين يفضلون هذا النوع من السجائر . ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة عشوائية تتكون من ٤٠٠ مدخن وسئل كل منهم عن نوع السجائر الذي يفضله فإذا أجاب ١٠٠ فرد بأنهم يفضلون ذلك النوع المراد اختباره فماذا نستنتج من ذلك ؟

استخدم مستوى معنوية ١٪ .

**ملحوظة (١) :** في حل هذا المثال لا نلجأ إلى الإسراف في شرح خطوات الحل كما في المثال السابق لأن المقصود بالإسهاب في المثالين السابقين هو توضيح طريقة وخطوات الاختبار أما الآن فيكفينا ذكر الحل في خطوات مختصرة .

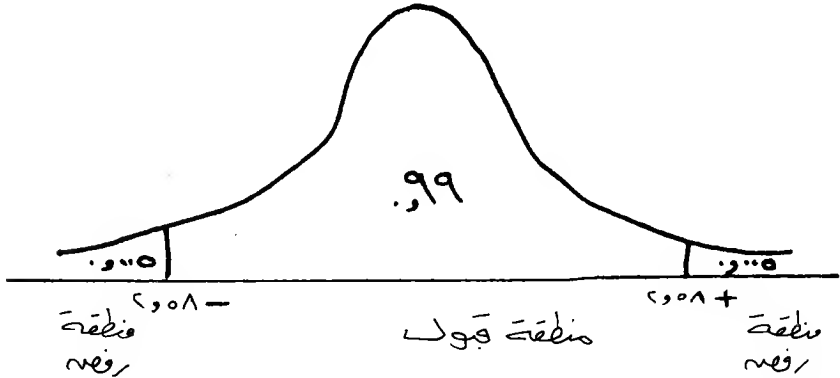
الحل

$$1 - F_0 : P = 0.20 \quad F_1 : P \neq 0.20$$

$$٢ - ص = \frac{P - J}{\sqrt{P(1-P)N}}$$

لها توزيع طبيعي قياسي .

٣ - عند مستوى المعنوية ١٪ أي عند درجة الثقة ٩٩٪ يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض من منحنى التوزيع الطبيعي القياسي كما في الشكل التالي :



٤ - نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة - حيث

$$J = \frac{100}{400} = 0.25, \quad N = 400$$

$$\therefore \text{ص المشاهدة} = \frac{0.25 - 0.20}{\sqrt{0.20(1-0.20)/400}} = \frac{0.05}{0.02} = 2.5$$

٥ - نجد أن قيمة ص المشاهدة تقع داخل منطقة القبول لذلك نقبل فرض العدم ونستنتج أن ادعاء المدير صحيح .

ويمكن باستخدام نفس الأساليب السابقة في البند (٧-٢) اختبار الفرض القائل بأن  $P$  أكبر من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأيمن من توزيع ص أو اختبار الفرض القائل بأن  $P$  أقل من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأيسر من توزيع ص .

**ملاحظة (٢) :** في نهاية البند (٨-١) ذكرنا أنه بناء على الأسلوب الذي يصاغ به فرض العدم فيمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل غير الشكل السابق وذلك برسم التوزيع الاحتمالي للإحصاء المراد اختبار المعلمة التي تناظره في المجتمع وتحديد منطقتي القبول والرفض على المحور الذي يمثل قيم الإحصاء مباشرة دون اللجوء إلى التحويل إلى المتغير الطبيعي القياسي ص . وسوف نتبع هذه الطريقة في البند التالي (٧-٤) كوسيلة إلى التعرف على هذا الأسلوب .

## (٧-٤) - اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين :

أحيانا يكون لدينا عيتان و يكون الهدف هو مقارنة متوسطيهما ، فقد نجد اختلافا بين المتوسطين ، كأن نجد متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية — فهل يكون معنى ذلك أن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع متوسطه أكبر من متوسط المجتمع المسحوب منه العينة الثانية — أم أن هذا الاختلاف بين متوسطيهما راجع إلى الصدفة البحتة وأن العيتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط .

فمثلا إذا كان لدينا آلتان لإنتاج سلعة معينة في أحد المصانع ثم سجلنا بيانات عن إنتاج الآلة الأولى لمدة ٦٠ يوما ( كعينة من العمر الإنتاجي لهذه الآلة ) فوجدنا متوسط الإنتاج اليومي لهذه الآلة ٢٥٠ وحدة ثم سجلنا بيانات عن آلة من نوع آخر لإنتاج نفس السلعة وذلك لمدة ٧٠ يوما ( كعينة أخرى من العمر الإنتاجي للآلة الثانية ) فوجدنا أن متوسط الإنتاج اليومي لها ٣٠٠ وحدة . و يهمننا أن نعرف سبب هذا الفرق . فإذا كان سبب هذا الفرق هو أن الآلة الثانية أكفأ من الأولى فإن إدارة المصنع قد تتخذ قرارا بوقف استخدام الآلة الأولى واستبدالها بآلة من النوع الثاني . أما إذا كان هذا الفرق راجعا إلى مجرد الصدفة البحتة فسترى إدارة المصنع أنه لا داعي لاستبدال الآلة . هذا التحليل يعتبر اختبارا لمقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن إيضاح هذا الاختبار بصورة عامة وكيفية إجرائه في الخطوات التالية :

(١) نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما :

س ١١ ، س ٢١ ، ..... س ١٢ ، س ٢٢ ، ..... س ٢٠٠٠

متوسط الأول  $\bar{X}_1$  وتباينه  $\sigma_1^2$  ومتوسط الثاني  $\bar{X}_2$  وتباينه  $\sigma_2^2$

(٢) نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من المجتمع الأول حجمها  $n_1$  مفردة ووجدنا وسطها

الحسابي  $\bar{x}_1$  وسحبنا عينة عشوائية من المجتمع الثاني حجمها  $n_2$  مفردة ووجدنا وسطها الثاني

الحسابي  $\bar{x}_2$  وحسبنا الفرق بين الوسطين فوجدناه  $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$  .

(٣) نلاحظ أن  $\bar{x}_1$  ما هي إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها

$n_1$  والمسحوبة من المجتمع الأول و  $\bar{x}_2$  كذلك قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات

التي حجم كل منها  $n_2$  مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني ، كما أن  $F$  ما هي إلا قراءة

في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات العشوائية التي يمكن أخذها من

المجتمعين والتي حجمها  $n_1$  مفردة من المجتمع الأول و  $n_2$  مفردة من المجتمع الثاني .

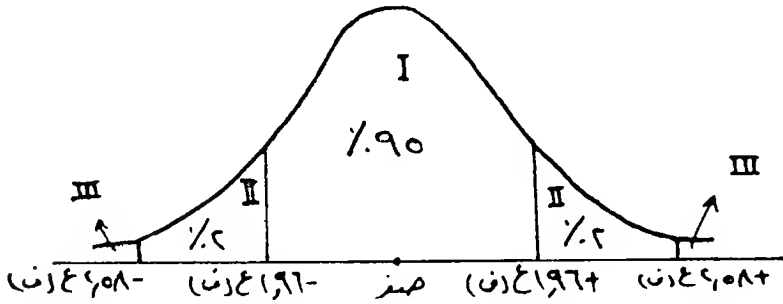
(٤) هناك نظرية إحصائية تنص على أنه :

إذا كان متوسطي المجتمعين الأصليين متساويان يكون التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق

$F$  يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه الصفر وانحرافه المعياري :

$$e(f) = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}$$

(٥) بتطبيق ما سبق دراسته عن فترات الثقة وعن التوزيع الطبيعي يمكن رسم توزيع مجتمع الفروق ف وتحديد فترات الثقة عليه كما يلي :



$$90\% = [ -196e(f) \leq f \leq +196e(f) ]$$

$$99\% = [ -2e(f) \leq f \leq +2e(f) ]$$

وهاتان الفترتان تم بناءهما على أساس افتراض أن المجتمعين الأصليين لهما نفس المتوسط .

ونتيجة الاختبار نتوقف على موقع الفرق ف بالنسبة لهاتين الفترتين و يكون أمامنا ثلاث حالات .

الحالة الأولى : أن تقع ف داخل الفترة الأولى (في المنطقة I) على الرسم و يكون معنى هذا أنه يحتمل أن يكون المجتمعان المسحوب منهما العينتان لهما نفس المتوسط ومع ذلك يظهر هذا الفرق بين متوسطي العينتين وهذا الاحتمال قدره ٩٥٪ هو احتمال كبير لهذا نستبعد وجود اختلاف بين متوسطي المجتمعين الأصليين ونعزي الفرق ف إلى مجرد الصدفة .

الحالة الثانية : أن تقع ف خارج الفترة الثانية (في المنطقة III) على الرسم ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ١٪ وهو احتمال صغير وعليه يكون الفرق ف فرقا حقيقيا (معنويا) غير راجع إلى مجرد الصدفة .

الحالة الثالثة : أن تقع ف بين الفترة الأولى والثانية (في المنطقة II) على الرسم ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ٢٪ وهذا احتمال صغير أي أن احتمال أن يكون الفرق ف راجعا للصدفة هو احتمال ضعيف و يرجح أن يكون هناك فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين الأصليين لهذا يجب سحب عينتين أخريتين لاستخدامهما في الحكم إذا أمكن ذلك . أما

إذا كان ذلك متعذرا فيكون القرار مثل القرار في الحالة الأولى تماما ولكن مع شيء من الحذر.

**ملاحظة (٣):** في الخطوة (٤) نجد أن قيمة ع (ف) تعتمد على تباين المجتمعين الأصليين  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  وحيث أنهما عادة يكونان مجهولين. لذا يمكن الاستعاضة عنهما بتباين العينتين  $s_1^2$  و  $s_2^2$  ويكون:

$$E(F) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

**ملاحظة (٤):** في الخطوة (١) كان كلامنا مقتصرًا على المجتمعات الكبيرة. أما إذا كان أحد المجتمعين محدودًا أو كلاهما محدود فالتغيير الوحيد في كل ما سبق في تقدير ع (ف).

فإذا كان المجتمع الأول محدودًا وحجمه  $n_1$  تكون ع (ف) كما يلي:

$$E(F) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 - 2}\right) \frac{s_2^2}{n_2}}$$

وبالمثل إذا كان المجتمع الأول كبيرًا والثاني محدودًا وحجمه  $n_2$  تكون

$$E(F) = \sqrt{\left(\frac{n_2 - 1}{n_2 - 2}\right) \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

أما إذا كان المجتمعان محدودين، حجم الأول  $n_1$  والثاني  $n_2$  تكون:

$$E(F) = \sqrt{\left(\frac{n_2 - 1}{n_2 - 2}\right) \frac{s_1^2}{n_1} + \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 - 2}\right) \frac{s_2^2}{n_2}}$$

**مثال (٤):** أخذت عينة مكونة من ٢٠٠ عامل من إحدى الصناعات فوجد أن متوسط أجرهم اليومي ٧٠ ريالًا مع انحراف معياري ١٢ ريالًا وأخذت عينة أخرى حجمها ٥٠ من العاملات من نفس الصناعة فوجد أن متوسط أجرهن اليومي ٦٠ ريالًا مع انحراف معياري ٥ ريالًا فهل يمكن أن نستنتج من هذه المعلومات أن العمال يتقاضون أجورًا أعلى من العاملات في هذه الصناعة؟

الحل

$$\bar{X} = 70 \text{ ريال} \quad \sigma_1 = 12 \text{ ريال} \quad n_1 = 200 \text{ عامل}$$



$$\overline{س} = 60 \text{ ريال} \quad \overline{ع} = 5 \text{ ريال} \quad \overline{ن} = 50 \text{ عملة}$$

$$\text{الفرق ف} = \overline{س}_1 - \overline{س}_2 = 60 - 70 = 10 \text{ ريال}$$

$$\sqrt{\frac{25}{50} + \frac{144}{200}} = \sqrt{\frac{2^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{4^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 5}} = \text{ع (ف)}$$

$$111 = \sqrt{72 + 50} =$$

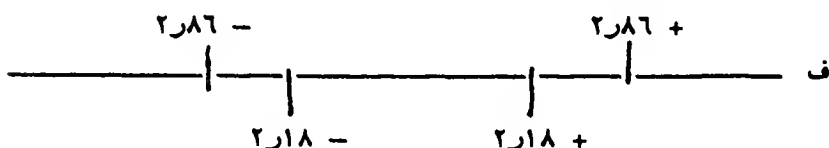
وتكون فترتا الثقة ٩٥% ، ٩٩% بفرض عدم وجود اختلاف بين أجور العمال والعاملات كما

يلي:

$$\text{الفترة الأولى : } \pm 196 \times 111 = \pm 218$$

$$\text{الفترة الثانية : } \pm 258 \times 111 = \pm 286$$

وبرسم فترتي الثقة على محور ف نجدهما كما يلي:



والآن نرى موقع ف على المحور نجد أنها تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن أجور العمال أكبر من أجور العاملات في هذه الصناعة.

**مثال (٥):** أخذت عينة حجمها ٥٠ طالبا من طلبة كلية الأرصاء البالغ عددهم ١٥٠ طالبا فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٦٥ سم والانحراف المعياري للطول ٥ سم وأخذت عينة أخرى حجمها ٦٠ طالبا من طلبة كلية العلوم البالغ عددهم ٣٠٠ طالب فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٧٥ سم والانحراف المعياري للطول ٧ سم. فهل نستنتج من هذه المعلومات أن طلبة كلية العلوم أطول قامة من طلبة كلية الأرصاء؟

الحل

$$\overline{س}_1 = 175 \text{ سم} \quad \overline{ع}_1 = 7 \quad \overline{ن}_1 = 60 \quad \overline{س}_2 = 165 \text{ سم} \quad \overline{ع}_2 = 5 \quad \overline{ن}_2 = 150$$

$$\overline{س}_1 = 175 \text{ سم} \quad \overline{ع}_1 = 7 \quad \overline{ن}_1 = 60 \quad \overline{س}_2 = 165 \text{ سم} \quad \overline{ع}_2 = 5 \quad \overline{ن}_2 = 150$$

$$\text{الفرق ف} = \overline{س}_1 - \overline{س}_2 = 175 - 165 = 10 \text{ سم}$$

نكون فترتا الثقة ٩٥% ، ٩٩% ولذا نحسب ع (ف) .  
وحيث أن المجتمعين الأصليين محدودان فإن :

$$\sqrt{\left(\frac{r_2^N - r_2^N}{1 - r_2^N}\right) \frac{r_2^2}{r_2^N} + \left(\frac{r_1^N - r_1^N}{1 - r_1^N}\right) \frac{r_1^2}{r_1^N}} = \text{ع (ف)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{50 - 150}{1 - 150}\right) \frac{25}{50} + \left(\frac{60 - 300}{1 - 300}\right) \frac{49}{60}} =$$

$$\sqrt{0.817 \times 8 + 0.5 \times 67} =$$

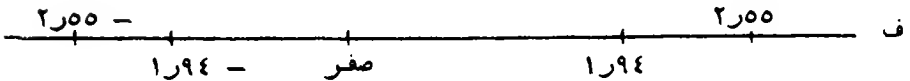
$$0.99 = \sqrt{0.65 + 0.335} =$$

وعلى ذلك تكون حدود فترتي الثقة هما :

$$\text{الأولى: } \pm 1.96 \times 0.99 = \pm 1.94$$

$$\text{الثانية: } \pm 2.58 \times 0.99 = \pm 2.55$$

وبرسم فترتي الثقة على محور ف نجدهما كما يلي :



وحيث أن قيمة ف = ١٠ وهى تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن طلبة كلية العلوم أطول قامة من طلبة كلية الأرصاد .

#### (٥-٧) - اختبار مدى عشوائية العينة :

تكلمنا في الباب السابق عن طرق اختيار العينات العشوائية واتضح لنا كيف أن الصدفة تلعب دورا كبيرا في هذا الاختبار - لهذا يهمنا دائما بعد اختيار العينة أن نختبر مدى عشوائيتها - أي إلى مدى تعتبر هذه العينة صورة حقيقية أو صورة مصغرة للمجتمع الذي سحبت منه . ولاجراء مثل هذا الاختبار نتعمد أثناء جمع بيانات العينة الحصول على بيانات إضافية تفيدنا في حساب مقياس معين يكون معلوما لدينا قيمته الحقيقية في المجتمع الأصلي وذلك سواء من تعداد سابق أو بأي وسيلة أخرى فيكون لدينا قيمتان لهذا المقياس هما قيمته الحقيقية في المجتمع وقيمته المحسوبة من العينة المختارة ، وبمقارنة هاتين القيمتين باستخدام فترات الثقة يمكن الحكم على مدى عشوائية العينة وسنقوم

بإيضاح ذلك مستخدمين الوسط الحسابي  $\bar{x}$  ثم النسبة ل كمقياسين إحصائيين للحكم على عشوائية العينة وذلك كما يلي :

أولاً : باستخدام الوسط الحسابي  $\bar{x}$  :

١ - نفرض أن المتوسط والانحراف المعياري في المجتمع هما  $\mu$  ،  $\sigma$  قيمتان معلومتان في هذه الحالة .

٢ - نحسب الوسط الحسابي من بيانات العينة .

٣ - نعلم من البند (٢-٦) عند بناء فترة الثقة للوسط الحسابي بأن :

$$\text{احتمال أن تقع } \bar{x} \text{ بين } \left( \mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ هو } 0.95$$

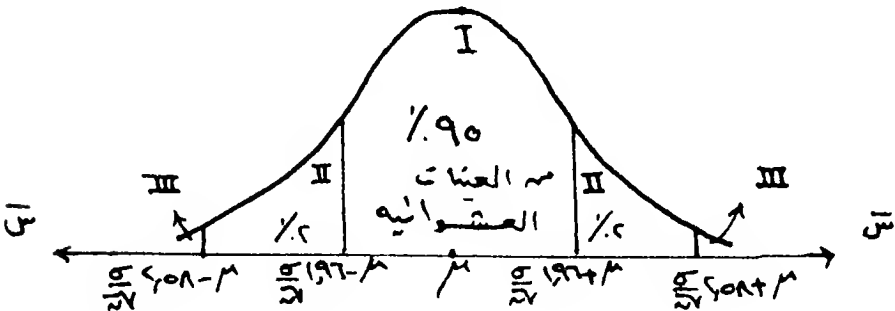
أي أنه في ٩٥٪ من العينات العشوائية تقع  $\bar{x}$  بين

$$\left( \mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

وكذلك في ٩٩٪ من العينات العشوائية تقع  $\bar{x}$  بين

$$\left( \mu - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

٤ - برسم هاتين الفترتين على محور التوزيع الطبيعي كما يلي :



٥ - نبحث عن موقع الوسط الحسابي  $\bar{x}$  بالنسبة إلى فترتي الثقة السابقتين فيكون لدينا ثلاث

حالات :

(أ) إذا وقعت س داخل الفترة الأولى (٩٥٪) أي في المنطقة I كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة تتحقق في ٩٥٪ من العينات العشوائية مما يطمئنا على عشوائية العينة. ولهذا نعتبر أن العينة المسحوبة عشوائية.

(ب) إذا وقعت س خارج الفترة (٩٩٪) أي في المنطقة II يكون معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ١٪ من العينات العشوائية وفي هذه الحالة يمكن الحكم بأن العينة غير عشوائية ولا يمكن استخدام بياناتها بأي حال من الأحوال لهذا لا بد من استبدال العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية.

(جـ) إذا وقعت س خارج الفترة الأولى (٩٥٪) ولكن داخل الفترة الثانية (٩٩٪) أي في المنطقة III كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ٢٪ من العينات العشوائية وهذا يجعلنا نشك في عشوائية العينة وفي هذه الحالة يفضل استبدال هذه العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية إذا أمكن ذلك أما إذا لم يكن ذلك ممكناً أو كان يكلف تكلفة كبيرة فنستخدم بيانات هذه العينة ولكن بشيء من الحذر.

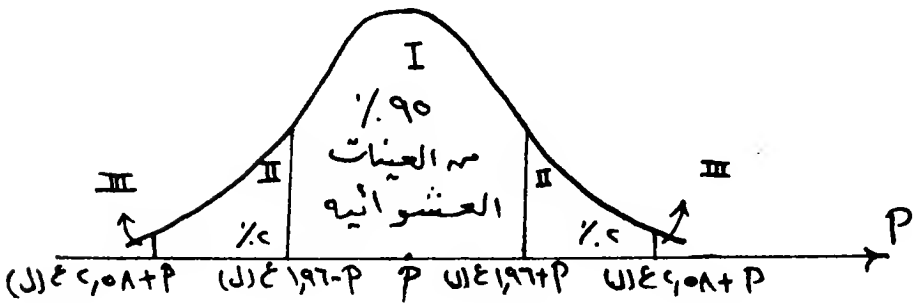
ثانياً : باستخدام النسبة ل :

نفرض أننا نعرف النسبة  $P$  في المجتمع ثم حسبنا النسبة ل من العينة فإن فترتي الثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ يمكن كتابتها في الصورة التالية :

احتمال أن تقع ل بين  $\pm ١.٩٦ ع$  (ل) يساوي ٩٥٪ .  
 ، احتمال أن تقع ل بين  $\pm ٢.٥٨ ع$  (ل) يساوي ٩٩٪ .

$$\frac{(P - 1) P}{n} \sqrt{\quad} = (ل) ع$$

وعلى هذا يمكن رسم هاتين الفترتين على محور التوزيع المعتاد كما يلي :



- و بنفس الأسلوب السابق يكون أمامنا ثلاث حالات :
- (أ) إذا وقعت ل ( المحسوبة من العينة ) في المنطقة I تعتبر العينة عشوائية .
- (ب) إذا وقعت في المنطقة II نشك في عشوائية العينة .

(ج) إذا وقعت ل خارج المناطق I ، II ،  
نقطع بأن العينة غير عشوائية .

**مثال (٦) :** سحبت عينة حجمها ١٠٠ مفردة من إحدى القرى وذلك لدراسة ميزانية الأسرة في الريف— فإذا كان متوسط العمرين أفراد العينة هو ٢٥ سنة وإذا كان معلوم من بيانات تعداد سابق أن متوسط العمر في القرية كلها ٣٠ سنة: والانحراف المعياري ٥ سنوات فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

**الحل**

نعلم أن متوسط العمر في المجتمع  $\mu = 30$  سنة  
والانحراف المعياري للعمر  $\sigma = 5$  سنوات  
وحجم العينة  $n = 100$   
ومتوسط العمر في العينة  $\bar{x} = 25$  سنة .

فترة الثقة ٩٥% هي  $( 30 \pm 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}} )$

، فترة الثقة ٩٩% هي  $( 30 \pm 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} )$

أي أن فترة الثقة الأولى هي  $( 29.02 - 30.98 )$  بدرجة ثقة ٩٥%

وأن فترة الثقة الثانية هي  $( 28.71 - 31.29 )$  بدرجة ثقة ٩٩%

وحيث أن  $\bar{x}$  المحسوبة من العينة هي ٢٥ تقع خارج الفترتين السابقتين فإنه في حكم المؤكد أن هذه العينة غير عشوائية .

**مثال (٧) :** إذا كانت نسبة الأميين في إحدى القرى الكبيرة تساوي ٧٠% من السكان وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس القرية هي ٦٧% فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

**الحل**

فترة الثقة الأولى هي  $( 0.7 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{100}} )$  بدرجة ثقة ٩٥%

أي أن الفترة الأولى هي  $( ٠.٦١ ، ٠.٧٩ )$  بدرجة ثقة ٩٥%

ولما كانت النسبة ل في العينة ٦٧٪ تقع داخل هذه الفترة الأولى فمعنى ذلك أن العينة عشوائية ولا داعي إذن لحساب الفترة الثانية .

\*\*\*

## تمارين

- ١ — إذا كان متوسط أعمار المصاييح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ٩٥٠ ساعة مع انحراف معياري ١٢٠ ساعة.
- ادعى مدير المصنع أنه قد أدخلت تعديلات على وسائل الإنتاج مما أطال أعمار هذا الإنتاج — ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة مكونة من ٨١ مصباحا وأضيئت حتى انحرقت جميعها وحسب متوسط أعمارها فوجد ١١٠٠ ساعة فهل يمكنك تأييد ادعاء المدير؟
- ٢ — البيانات التالية توضح الأجر الأسبوعي بالريالات لمجموعتين من العمال والعاملات في إحدى المصانع:

الأجر الأسبوعي بالريالات	-٢٠٠	-٤٠٠	-٦٠٠	-٨٠٠	-١٠٠٠	-١٤٠٠ ٢٠٠٠	المجموع
عدد العمال	١٥	٢٥	٤٠	١٠	٥	٥	١٠٠
عدد العاملات	١٥	٢٢	١٧	٣	٢	١	٦٠

هل ترى من هذه البيانات أن أجور العمال أعلى من أجور العاملات في هذا المصنع؟ وضع إجابتك في الحالتين التاليتين:

الأولى: إذا كان عدد العمال والعاملات في المصنع كبيرا.

ثانيا: إذا كان عدد العمال في المصنع ٣٠٠ عامل والعاملات ٢٠٠ عاملة.

٣ — إذا كانت نسبة الأفراد الذين يقل سنهم عن ٢٠ سنة في إحدى المدن تساوي ٤٠٪ وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس المدينة ٤٥٪ فهل يمكن أن نستنتج من هذا الفرق بين النسبتين أن العينة لم تكن عشوائية؟

٤ — اختبر عشوائية العينة في التمرين السابق إذا كان حجمها ٥٠٠ بدلا من ١٠٠.

٥ — من المعروف أن متوسط الإنتاج اليومي للعمال في إحدى الصناعات ٦٠ قطعة والانحراف المعياري لهذا الإنتاج اليومي يساوي ٧ قطع. أخذت عينة عشوائية مكونة من ٩٠ عاملا من هذه الصناعة ودربوا تدريباً مهنياً وبعد التدريب وجد أن متوسط إنتاجهم اليومي ٦٥ قطعة.

فهل يدلنا هذا الفرق على أن التدريب المهني يرفع من إنتاج العامل؟

٦ — من المعروف أن نسبة الذكور بين المواليد تبلغ ٥١٫٥٪ وفي إحدى القرى ذات الدخل المنخفض كان عدد المواليد في عام ما ٢٥٠ من بينهم ١٣٥ من الذكور. فهل يدل ذلك على أن انخفاض الدخل يرفع من نسبة الذكور بين المواليد؟

٧ - مصنع ينتج نوعاً معيناً من المسامير طوله ٨ سم . أراد صاحبه التأكد من دقة الآلات فأخذ عينة عشوائية مكونة من ٥٠٠ مسمار ووجد أن توزيعها بحسب الأطوال كما يلي :

الطول بالملليمتر	- ٧٨	- ٧٩	- ٨٠	- ٨١	- ٨٢	- ٨٣ - ٨٤
عدد المسامير	٣٠	٦٠	١٠٠	٢٠٠	٨٠	٣٠

- ولما كان متوسط هذه العينة يزيد عن الطول المطلوب فقد أمر صاحب المصنع بوقف الآلات على اعتبار أن الإنتاج أطول من اللازم . اختبر سلامة الأمر الذي أصدره صاحب المصنع .
- ٨ - من المعروف أن نسبة الإصابة بمرض معين في إحدى المناطق ٧٠٪ - ما رأيك في عشوائية عينة أخذت من هذه المنطقة ووجد أن نسبة الإصابة فيها ٦٥٪ وذلك في كل من الحالات الآتية :
- أ - إذا كان حجم العينة ٢٠٠ فرد .
- ب - إذا كان حجم العينة ٣٠٠ فرد .
- ج - إذا كان حجم العينة ٥٠٠ فرد .
- ٩ - أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بها ٨١ تلميذاً والثانية بها ١٠٠ تلميذاً واستعمل في تدريس مادة الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى طريقة خاصة بينما استعملت الطريقة العادية في تدريس هذه المادة للمجموعة الثانية - وفي نهاية العام وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٧٠ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات بينما كان متوسط درجات المجموعة الثانية ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات . فهل يمكننا أن نستنتج من هذه المعلومات أن الطريقة الخاصة تزيد من تحصيل التلاميذ ؟

\*\*\*



## الباب الثامن

### تحليل نتائج العينات الصغيرة



## تحليل نتائج العينات الصغيرة

(١-٨) مقدمة:

تكلّمنا في الباب السادس عن طريقة تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة كما هو مبين في بند (٦-٢) وذكرنا أنه إذا كان لدينا مجتمع ما متوسطه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$  وسحبنا منه عينات كبيرة حجم كل منها  $n$  ووسطها  $\bar{x}$  وتباينها  $s^2$  فإن الوسط الحسابي  $\bar{x}$  يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu$  وتباينه  $\frac{\sigma^2}{n}$  أي أن:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z$$

يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا قياسيا. وقد استخدمنا هذه النتيجة الهامة في إيجاد تقدير لمتوسط المجتمع  $\mu$ . ولكن في كثير من الدراسات يكون تباين المجتمع  $\sigma^2$  مجهولا لذلك فإننا نستعوض عنه بتباين العينة  $s^2$  وفي هذه الحالة يظل المتغير

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = t$$

يتبع تقريبا توزيع طبيعي قياس طالما كان حجم العينة كبيرا. أما إذا كان حجم العينة صغيراً أي أقل من ٣٠ مفردة فإن المتغير:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

لم يعد يتبع التوزيع الطبيعي القياسي وإنما يتبع توزيع ت بدرجات حرية  $(n - 1)$ . ومن ذلك نلاحظ أن المتغير:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا إذا كان حجم العينة  $n$  كبيرا بينما يتبع توزيع ت بدرجات حرية

(٨ - ١) إذا كان حجم العينة صغيرا وعلى ذلك تكون أساليب تحليل نتائج العينات الصغيرة هي نفس أساليب تحليل نتائج العينات الكبيرة مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت.

ملاحظة (١):

عندما يكون حجم العينة كبيرا فإن تباينها يحسب من الصيغة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

أما في حالة العينات الصغيرة فإن تباين العينة يحسب من الصيغة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

وذلك لأسباب إحصائية لا نريد التعرض لها الآن.

(٨-٢) - تقدير متوسط المجتمع باستخدام عينة صغيرة:

نفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  مجهولان، ونرغب في تقدير متوسط هذا المجتمع وذلك باستخدام عينة عشوائية صغيرة مسحوبة منه. نحسب متوسط العينة  $\bar{x}$  وكذلك انحرافها المعياري  $s$ ، وباستخدام نفس الأسلوب المتبع في بند (٦-٢) عند تحديد فترة ثقة للمتوسط  $\mu$  مع مراعاة أن المتغير:  $\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$  يتبع توزيع ت بدرجات حرية (٨ - ١) نجد أن:

$$1 - \alpha = \left[ \frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} + \bar{x} \leq \mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} - \bar{x} \right]$$

حيث  $\alpha_{\frac{\alpha}{2}}$  هما قيمتا المتغيرات اللتان تحصران بينهما احتمال قدرة (١ -  $\alpha$ ) وهذا يعني أن:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} + \bar{x} \leq \mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} - \bar{x}$$

بدرجة ثقة قدرها (١ -  $\alpha$ ). وهذه فترة ثقة حددها الأدنى (  $\frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} - \bar{x}$  )

وحدها الأعلى (  $\frac{s}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{\alpha}{2}} + \bar{x}$  ) .

مثال (١): أخذت عينة عشوائية مكونة من ٢٥ عاملا من عمال صناعة ما فوجد أن متوسط أجرهم الشهري ٢٥٠ ريال مع انحراف معياري ٤٠٠ ريال.

والمطلوب إيجاد فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

### الحل

١- نفرض أن  $\mu$  متوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة.

٢-  $n = 25$ ،  $s = 250$  ريال،  $c = 400$  ريال

٣- تكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

بدرجة ثقة (١ -  $\alpha$ ).

٤- حيث ان درجة الثقة (١ -  $\alpha$ ) = ٩٥٪ ودرجات الحرية  $n - 1 = 24$  - نبحث

في جدول ت أمام الصف م = ٢٤ نجد أن قيمة ت التي تجعل مساحة الذيلين تساوي ٥٪.

هي:

$$t_{\alpha/2} = 2.064$$

$$-5 \quad \frac{c}{s\sqrt{n}} = \frac{400}{250\sqrt{25}} = 80$$

$$t_{\alpha/2} \times \frac{c}{s\sqrt{n}} = 2.064 \times 80 = 165.12$$

∴ الحد الأدنى لفترة الثقة = ٢٥٠ - ١٦٥.١٢ = ٨٤.٨٨ ريالاً

والحد الأعلى لفترة الثقة = ٢٥٠ + ١٦٥.١٢ = ٤١٥.١٢ ريالاً

وبهذا يمكن القول أن متوسط الأجر الشهري لعمال الصناعة كلها يتراوح بين ٨٤.٨٨ و ٤١٥.١٢

ريالاً وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

مما سبق يتضح لنا جلياً عدم وجود أي اختلاف في تقدير متوسط المجتمع من بيانات عينات صغيرة عنه باستخدام بيانات عينات كبيرة إلا في استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت - وهذا ينطبق على اختبار الفروض.

(٨ - ٣) اختبار فرض معين حول متوسط المجتمع:

نفرض أن لدينا مجتمعاً وسطه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$  مجهولان ونرغب في اختبار فرض معين حول المتوسط  $\mu$  باستخدام عينات صغيرة. نتبع نفس الأسلوب المستخدم في البند (٧ - ٢) مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت كما يتضح من المثال التالي:

مثال (٢) : إذا كان متوسط الوقت الذي يستغرقه العامل في صناعة معينة لتغليف سلعة ما هو ٥٠ دقيقة. أدخلت تعديلات على عملية التغليف بهدف اختصار الوقت ولاختبار ذلك أخذت عينة مكونة من ١٢ عامل فوجد أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف هو ٤١ دقيقة مع انحراف معياري ١٠ دقائق.

فهل ترى أن هناك أثرا حقيقيا للتعديلات التي أدخلت على عملية التغليف ؟ استخدم مستوى معنوية ٠.٠٥ .

### الحل

أولا: الفرض الإحصائي :

فرض العدم  $F_0: \mu = 50$  دقيقة.

الفرض البديل  $F_1: \mu > 50$  دقيقة

ثانيا : الاختبار الإحصائي :

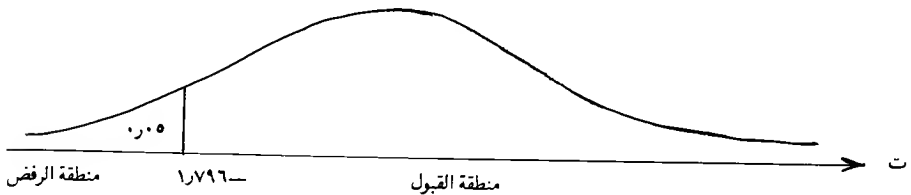
$$(أ) \quad \text{باعتبار أن فرض العدم صحيح نعلم أن : } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{50 - 41}{\frac{10}{\sqrt{12}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (١١ - ١) .

(ب) من الفرض البديل ( $\mu > 50$ ) وعند مستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  يمكن استخدام

جدول توزيع ت عند درجات الحرية  $m = 11$  لتحديد منطقتي القبول والرفض على محور ت

كما في الشكل الآتي :



$$(m = 11)$$

(ج) من بيانات العينة نحسب قيمة ت

$$\text{قيمة ت المحسوبة} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{50 - 41}{\frac{10}{\sqrt{12}}}$$

$$311 - = \frac{50 - 41}{10} = \frac{9}{127}$$

ثالثا : اتخاذ القرار :

بما أن  $t = 311$  تقع في منطقة الرفض لذلك نرفض فرض العدم عند مستوى المعنوية ٥٠٪ وهذا يعني أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف قد انخفض بالفعل وأصبح أقل من ٥٠ دقيقة وهذا يبرر استخدام الطريقة الجديدة في عملية التغليف .

### ملاحظة (٢) :

يجب أن نتذكر أنه لو كان الفرض البديل هو  $\mu < 50$  فإن منطقة الرفض تكون على الذيل الأيمن من توزيع  $t$  كذلك لو كان الفرض البديل هو  $\mu \neq 50$  فإن منطقة الرفض تكون على ذيلي توزيع  $t$  .

### (٨-٤) - إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين :

كثيرا ما نحتاج لتقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين بفترة ثقة مناسبة . فمثلا قد يرغب مزارع في معرفة مدى جودة نوع جديد من بذور القمح وذلك بأن يستخدم هذا النوع الجديد في الزراعة ثم يقدر الفرق بين متوسط المحصول من هذا النوع الجديد ومتوسط المحصول من النوع القديم الذي اعتاد على زراعته .

والآن نفرض أن لدينا مجتمعين يتبعان توزيعا طبيعيا متوسط الأول  $\mu_1$  ومتوسط الثاني  $\mu_2$  وأن تباينهما  $\sigma_1^2$  متساو ومجهول . فإذا أخذنا عينات عشوائية صغيرة حجم كل منها  $n_1$  من المجتمع الأول ومتوسطها  $\bar{x}_1$  وتباينها  $s_1^2$  وأخذنا عينات عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني حجم كل منها  $n_2$  ومتوسطها  $\bar{x}_2$  وتباينها  $s_2^2$  فإن هناك نظرية إحصائية تنص على أن المتغير :

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

يتبع توزيع  $t$  بدرجات حرية  $(n_1 + n_2 - 2)$  حيث أن  $\bar{x}$  هي تقدير للتباين  $\sigma^2$  محسوبة من بيانات العينتين من العلاقة :

$$\bar{s}^2 = \frac{\frac{1}{n_1} (1 - \frac{1}{n_1}) + \frac{1}{n_2} (1 - \frac{1}{n_2})}{2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}$$

و باستخدام هذه النظرية وخواص توزيعات التي سبق دراستها في البند (٣-٨) نستطيع القول

إن:

$$[ \alpha - 1 ] \geq \frac{(\mu_1 - \mu_2) - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq \alpha_{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\alpha - 1 =$$

و باستخدام نفس الأساليب السابقة في حالة العينات الكبيرة فإننا نستطيع القول إن:

$$[ \alpha - 1 ] \geq \frac{(\mu_1 - \mu_2) - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq \alpha_{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \geq$$

$$\alpha - 1 = [ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} ] \geq \alpha_{\frac{\gamma}{2}} + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$$

وعلى ذلك تكون فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين  $(\mu_1 - \mu_2)$  بدرجة ثقة  $(\alpha - 1)$

هي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \alpha_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

**مثال (٣):** رغبت وزارة المعارف في دراسة الفرق بين مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة وطلاب الرياضيات التقليدية، فأخذت عينة مكونة من ١٢ طالبا من طلاب الرياضيات المعاصرة وعشرة من طلاب الرياضة التقليدية وأعطتهم امتحانا عاما في الرياضيات— فكان متوسط درجات طلبة الرياضيات المعاصرة ٨٥ درجة مع انحراف معياري ٤ درجات بينما كان متوسط درجات طلاب الرياضيات التقليدية ٨١ درجة مع انحراف معياري ٥ درجات— والمطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق بين مستوى طلاب الرياضيات الحديثة والتقليدية وذلك بدرجة ثقة ٩٠٪.

### الحل

١- نفرض أن  $\mu_1$  ،  $\mu_2$  هما متوسطي درجات طلاب الرياضيات المعاصرة والرياضيات التقليدية على الترتيب.

٢- المطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق  $(\mu_1 - \mu_2)$  بدرجة ثقة ٩٠٪.



٣ - نعلم أن :

عدد طلاب العينة الأولى  $\mu_1 = 12$  ،  $\overline{S_1} = 85$  ،  $\sigma_1 = 4$  ،  
 عدد طلاب العينة الثانية  $\mu_2 = 10$  ،  $\overline{S_2} = 81$  ،  $\sigma_2 = 5$  ،  
 تقدير التباين المشترك هو :

$$\frac{\sigma_1^2 (1 - \mu_2) + \sigma_2^2 (1 - \mu_1)}{2 - \mu_2 + \mu_1} = \sigma^2$$

$$20.05 = \frac{25 \times 9 + 16 \times 11}{2 - 10 + 12} =$$

$$478 = \sqrt{20.05} = \sigma$$

٤ - درجة الثقة المطلوبة ٩٠٪

١٠٪ =  $\alpha$  ،  $\alpha/2 = 0.05$  ، ومن جداول وعند درجات الحرية.

$$20 = 2 - 10 + 12 = 2 - \mu_2 + \mu_1 = \mu$$

$$1725 = \text{نجد أن } t_{0.05}$$

٥ - وبهذا تكون فترة الثقة الفرق  $\mu_1 - \mu_2$  عند درجة الثقة ٩٠٪ هي :

$$(\overline{S_1} - \overline{S_2}) \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}$$

وبالحساب نجد أن فترة الثقة هي :

$$(81 - 85) \pm 1.725 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} \times 478$$

الحد الأدنى لفترة الثقة =  $4 - 331 = 331$  ،

والحد الأعلى لفترة الثقة =  $4 + 331 = 331$  ،

وبهذا يكون حدى الثقة الأدنى والأعلى موجبان وهذا يوضح ارتفاع مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة عن طلاب الرياضيات التقليدية.

(٨-٥) - اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين :

كثير من الدراسات تتطلب مقارنة بين متوسطي مجتمعين بناء على معلومات من عينات صغيرة

مسحوبة من كل من المجتمعين . فمثلا قد ترغب الجامعة عمل مقارنة بين الطلبة والطالبات لمعرفة مستوى التحصيل لكل منهما— أو كأن تقوم الدولة بدراسة مقارنة بين متوسط دخل الأسر في منطقتين معينتين أو كأن تقوم وزارة المعارف بدراسة لمعرفة الفرق بين نظامين من أنظمة التعليم لتبني الأفضل منهما .

في مثل هذه الدراسات يكون المطلوب اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين فنفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu_1$  وتباينه  $\sigma_1^2$  وأن هناك مجتمعا آخر يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه  $\mu_2$  وله نفس التباين  $\sigma_2^2$  . والآن نرغب في إجراء الاختبار الإحصائي الآتي :

$$(1) - \text{فرض العدم} : \text{ف.} : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{أو} \quad \mu_1 - \mu_2 = \text{صفر}$$

وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين .  
— والفرض البديل في يكون أحد الحالات الآتية :

$$(I) \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{أو} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq \text{صفر}$$

$$(II) \mu_1 < \mu_2 \quad \text{أو} \quad \mu_1 - \mu_2 < \text{صفر}$$

$$(III) \mu_1 > \mu_2 \quad \text{أو} \quad \mu_1 - \mu_2 > \text{صفر}$$

(ب) لذلك نسحب عينة عشوائية صغيرة حجمها  $n_1$  من المجتمع الأول وليكن وسطها الحسابي  $\bar{x}_1$  وتباينها  $s_1^2$  ونسحب عينة عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني وليكن وسطها الحسابي  $\bar{x}_2$  وتباينها  $s_2^2$  .

(جـ) من النظرية الموضحة في بند (٨-٤) و باعتبار أن فرض العدم صحيح يكون

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية  $(n_1 + n_2 - 2)$  .

(د) باستخدام الفرض البديل في مستوى المعنوية  $\alpha$  تتحدد منطقتي القبول والرفض على محور توزيع ت .

(هـ) بحساب قيمة ت المشاهدة نستطيع اتخاذ القرار المناسب حسب وقوعها في منطقة القبول أو منطقة الرفض كما يتضح من المثال الآتي:

مثال (٤) : لمقارنة متوسط أوزان الطلبة والطالبات أخذت عينة حجمها ١٠ طلاب فكانت أوزانهم بالكيلو جرام هي:

٦٧ - ٧٥ - ٧٤ - ٧٢ - ٨٠ - ٧١ - ٥٩ - ٦٦ - ٥٤ - ٨٢ وأخذت عينة مكونة من ٨ طالبات فكانت أوزانهم بالكيلو جرام كما يلي:

٥٢ - ٧٣ - ٦٢ - ٦٨ - ٦٧ - ٦٣ - ٦٧ - ٦٨

فهل يمكن القول أن الطالبات أقل وزنا من الطلاب؟  
استخدم مستوى المعنوية ٥%.

الحل

نفرض أن  $\mu_1$  متوسط أوزان الطلاب.

$\mu_2$  متوسط أوزان الطالبات

فرض العدم ف:  $\mu_1 = \mu_2$  أي أن  $\mu_1 - \mu_2 = 0$  = صفر

الفرض البديل ف:  $\mu_1 < \mu_2$  أي أن  $\mu_1 - \mu_2 < 0$  = صفر

نحسب الوسط الحسابي والتباين لكل عينة كما يلي:

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$	$\sum (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$	$\sum (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2$
٦٧	- ٢	٩	٥٢	- ١٢	١٦٩
٧٥	٥	٢٥	٧٢	٨	٦٤
٧٤	٤	١٦	٦٢	- ٣	٩
٧٢	٢	٤	٦٨	٢	٩
٨٠	١٠	١٠٠	٦٧	٢	٤
٧١	١	١	٦٣	- ٢	٤
٥٩	- ١١	١٢١	٦٧	٢	٤
٦٦	- ٤	١٦	٦٨	٣	٩
٥٤	- ١٦	٢٥٦			
٨٢	١٢	١٤٤			
٧٠٠		٦٩٢	٥٢٠		٢٧٢

$$\bar{x}_1 = \frac{700}{10} = 70 \text{ كجم} \quad \bar{x}_2 = \frac{692}{9} = 76.89$$

$$\frac{272}{7} = \frac{2}{2} \text{ كجم} \quad 60 = \frac{520}{8} = \frac{2}{2} \text{ كجم}$$

$$\frac{\frac{2}{2} \epsilon (1 - \frac{2}{2}) + \frac{2}{2} \epsilon (1 - \frac{2}{2})}{2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2}} = \frac{2}{2} \epsilon$$

$$\frac{\frac{2}{2} (\frac{2}{2} - \frac{2}{2}) + \frac{2}{2} (\frac{2}{2} - \frac{2}{2})}{2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2}} =$$

$$60.25 = \frac{964}{16} = \frac{272 + 692}{2 - 8 + 10} =$$

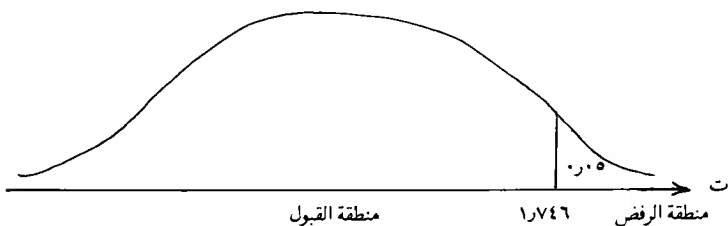
$$\therefore \epsilon = \sqrt{60.25} = 7.76 \text{ كجم}$$

باعتبار أن فرض العدم صحيح فإن:

$$\frac{\frac{2}{2} - \frac{2}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} \sqrt{\epsilon}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية  $(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} - 1) = 1$ .

باستخدام الفرض البديل  $(\mu_1 < \mu_2)$  وعند مستوى المعنوية 0.05 تحدد منطقة الرفض على الذيل الأيمن من محور توزيع ت كما هو مبين على الشكل الآتي:



تُحسب قيمة ت المشاهدة من بيانات العينة باعتبار أن فرض العدم صحيح .

$$\therefore \text{ت المشاهدة} = \frac{65 - 70}{\frac{1}{.8} + \frac{1}{1.0}} \sqrt{7.76} = \frac{5}{3.768} = 1.326$$

بما أن ت المشاهدة تقع في منطقة القبول فعليه نقبل فرض العدم وهذا يعني أنه ليس هناك أي فرق بين متوسط أوزان الطلاب ومتوسط أوزان الطالبات وأن الفرق الذي يظهر من بيانات العينتين يرجع إلى مجرد الصدفة.

\*\*\*



## تمارین





## تمارين

١ - أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠ علب من علب السمنة التي ينتجها أحد المصانع فكانت أوزانها بالكيلوجرام كما يلي:

٩٨-٩١-١٠٤-٩٩-٩٨-٩٠-١٠٢-٩٧-٩٩-١٠٣ والمطلوب :

أ - أوجد فترة ثقة لمتوسط وزن العلب من إنتاج هذا المصنع بدرجة ثقة ٩٥%

ب - هل يمكن تأييد ادعاء مدير المصنع بأن متوسط وزن العلب ١٠ كيلوجرام؟

٢ - قام خمسة من المساحين بقياس مساحة قطعة أرض فكانت المساحة التي حصل عليها كل منهم هي :

٢٨-٢٥-٢٢-٢٩-٢٣

استخدم هذه المعلومات في إيجاد فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٨% للمساحة الحقيقية لهذه القطعة .

٣ - لاختبار تأثير نوع السماد على محصول القمح في مزرعة نموذجية تم تخصيص

٢٤ قطعة أرض متساوية المساحة والخصوبة والرعاية - وتم زراعة القطع جميعها

بمحصول القمح مع معالجة نصف القطع بالسماد الجديد وترك النصف الثاني بدون

سماد . فإذا كان متوسط وزن المحصول من القطع التي لم تعالج بالسماد الجديد هو

٨٠ كجم يانحراف معياري ٢٣ كجم بينما كان متوسط وزن المحصول الناتج من

القطع المعالجة بالسماد الجديد هو ١٠٥ كجم يانحراف معياري ١٨ كجم - فهل

تستنتج من ذلك أن السماد الجديد يؤدي إلى رفع إنتاج محصول القمح؟

استخدم مستوى المعنوية التالي :

أ -  $\alpha = 1\%$

ب -  $\alpha = 5\%$

٤ - في أربع تجارب لاختبار تأثير نوعين أ، ب من السماد على محصول البطاطس وجد أن

الإنتاج قد زاد عند استعمال السماد أ عنه عند استعمال السماد ب بالمقادير الآتية في

الفدان: ٥٤٦٤-٣٠١٣-٥٢٤١-٦٧٨٦ طن .

(I) هل ترى أن السماد ب مكافئ للسماد أ؟

(II) أنشئ فترة ثقة للفرق بين تأثيري هذين النوعين من السماد .

٥ - أخذت عينتان من إنتاج مصنعين من مصانع المصابيح الكهربائية فوجد أن أعمار

المصابيح بالساعات في العينتين كما يلي :

العينة الأولى : ( ١٦٠٠ - ١٦١٠ - ١٦٥٠ - ١٦٨٠ - ١٧٠٠ - ١٧٢١ - ١٨٠٠ )

العينة الثانية: ( ١٥٨٠ - ١٦٤٠ - ١٧٠٠ - ١٧٥٠ ) .

مع افتراض أن تباين أعمار إنتاج المصنعين متساويان .  
أ - أنشئ فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٩٪ للفرق بين متوسطي أعمار المصاييح في المصنعين .

ب - اختبر تساوي متوسطي أعمار المصاييح التي ينتجها المصنعان .



# المراجع

## أولا : المراجع العربية :

- ١ — «طرق التحليل الإحصائي» د. أحمد عباده سرحان — دار المعارف ١٩٦٥ .
- ٢ — «أسس الإحصاء» د. أحمد عباده سرحان — د. صلاح الدين طلبه
- ٣ — «مقدمة الإحصاء التطبيقي» د. أحمد عباده سرحان — د. سعد الدين الشيال — د. ثابت محمود الشريف .
- ٤ — «مبادئ الطرق الإحصائية» د. عبد الرحمن البدرى — دار النهضة العربية — ١٩٦٤ .
- ٥ — «مقدمة الطرق الإحصائية» د. عبد اللطيف عبد الفتاح — د. أحمد محمد عمر .
- ٦ — «الإحصاء التطبيقي» د. محمد فتحي محمد علي — مكتبة عين شمس .
- ٧ — «الإحصاء في اتخاذ القرارات» د. محمد فتحي محمد علي مكتبة عين شمس .
- ٨ — «مبادئ في علم الإحصاء» د. مدني دسوقي مصطفى — دار النهضة العربية — ١٩٦٥ .
- ٩ — «أسس الإحصاء» د. مصطفى أحمد علي ١٩٧٣ .



- 1 - A. H. Pollard " Introductory Statistics A Service Course."  
Perganon Press (Australia) Pty Limited.
- 2 - Fredrick E. Croxton, Dudley J. Cowden and Sidney Kelein, " Applied General Statistics" Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.
- 3 - Neil R. Vllman, "Elementary Stätistics-An Applied Approach". John Wiley & Sons.
- 4 - Ronald E. Walpole, "Elementary Statistical Concepts Macmillan Publising Co., Inc. New York Collier Macmillan Publishers London.



# فهرست

الموضوع	الصفحة
الباب الأول : مبادئ الاحتمالات	١٣
الباب الثاني : التوزيعات الاحتمالية	٤١
الباب الثالث : بعض التوزيعات الاحتمالية	٥٩
الباب الرابع : العينات	١٠٣
الباب الخامس : توزيعات المعاينة ( العينات الكبيرة )	١١٩
الباب السادس : تقدير معالم المجتمع بفترة الثقة ( العينات الكبيرة )	١٤١
الباب السابع : اختبار الفروض الإحصائية	١٥٩
الباب الثامن : تحليل نتائج العينات الصغيرة	١٨٥





## سلسلة : الكتاب العربي السعودي

### صدر منها :

- الجبل الذي صار سهلاً (نقد)
- من ذكريات مسافر
- عهد الصبا في البادية (قصة مترجمة)
- التنمية قضية (نقد)
- قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا (نقد)
- الظلم (مجموعة قصصية)
- الدوامه (قصة طويلة)
- غداً أنسى (قصة طويلة) (نقد)
- موضوعات اقتصادية معاصرة
- أزمة الطاقة إلى أين؟
- نحو تربية إسلامية
- إلى ابنتي شيرين
- رفات عقل
- شرح قصيدة البردة
- عواطف إنسانية (ديوان شعر) (نقد)
- تاريخ عمارة المسجد الحرام (نقد)
- وقفة
- خالتي كدرجان (مجموعة قصصية) (نقد)
- أفكار بلا زمن
- كتاب في علم إدارة الأفراد (الطبعة الثانية)
- الإنحار في ليل الشجن (ديوان شعر)
- طه حسين والشيخان
- التنمية وجهها الوجه
- الحضارة تحد (نقد)
- عبر الذكريات (ديوان شعر)
- لحظة ضعف . (قصة طويلة)
- الرجولة عماد الخلق الفاضل
- ثمرات قلم
- بائع التبغ (مجموعة قصصية مترجمة)
- أعلام الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة (تراجم)
- النجم الفريد (مجموعة قصصية مترجمة)
- مكانك تحمدي
- قال وقلت
- نبض
- نبت الأرض
- السعد وعد (مسرحية)
- الأستاذ أحمد قنديل
- الأستاذ محمد عمر توفيق
- الأستاذ عز يز ضياء
- الدكتور محمود محمد سفر
- الدكتور سليمان بن محمد الغنام
- الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
- الدكتور عصام خوقير
- الدكتور أمل محمد شطا
- الدكتور علي بن طلال الجهني
- الدكتور عبدالعز يز حسين الصويغ
- الأستاذ أحمد محمد جمال
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الدكتور محمود حسن زيني
- الدكتور مريم البغدادى
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الدكتور عبدالله حسين باسلامة
- الأستاذ أحمد السباعي
- الأستاذ عبدالله الحصين
- الأستاذ عبدالوهاب عبدالواسع
- الأستاذ محمد الفهد العيسى
- الأستاذ محمد عمر توفيق
- الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
- الدكتور محمود محمد سفر
- الأستاذ طاهر زغشري
- الأستاذ فؤاد صادق مفتي
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الأستاذ محمد حسين زيدان
- الأستاذ حمزة بوقري
- الأستاذ محمد علي مغربي
- الأستاذ عز يز ضياء
- الأستاذ أحمد محمد جمال
- الأستاذ أحمد السباعي
- الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
- الدكتور فائزة أمين شاكر
- الدكتور عصام خوقير

- قصص من سورست موم (مجموعة قصصية مترجمة)
- عن هذا وذلك (الطبعة الثانية)
- الأصداف (ديوان شعر)
- الأمثال الشعبية في مدن الحجاز (نقد)
- أفكار تربوية
- فلسفة المجانين
- خدعني بجها (مجموعة قصصية)
- نقر العصافير (ديوان شعر)
- التاريخ العربي وبدايته (الطبعة الثالثة)
- المجاز بين الجمالة والحجاز (الطبعة الثانية)
- تاريخ الكعبة المعظمة (الطبعة الثانية)
- خواطر جريئة
- السنيورة (قصة طويلة)
- رسائل إلى ابن بطوطة (ديوان شعر)
- جسور إلى القمة (تراجم)
- تأملات في دروب الحق والباطل
- الحمى (ديوان شعر)
- قضايا ومشكلات لغوية
- ملامح الحياة الاجتماعية في الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة
- زيد الخير
- الشوق إليك (مسرحية شعرية)
- كلمة ونصف
- شيء من الحصاد
- أصداء قلم
- قضايا سياسية معاصرة
- نشأة وتطور الإذاعة في المجتمع السعودي
- الإعلام موقف
- الجنس الناعم في ظل الإسلام
- ألحان مغترب (ديوان شعر) (الطبعة الثانية)
- غرام ولادة (مسرحية شعرية) (الطبعة الثانية)
- سير وتراجيم (الطبعة الثالثة)
- الموزون والمخزون
- لجام الأقلام
- نقاد من الغرب
- حوار.. في الحزن الدافيء
- صحة الأسرة
- سباعيات (الجزء الثاني)
- خلافة أبي بكر الصديق
- البترول والمستقبل العربي (الطبعة الثانية)
- إليها .. (ديوان شعر)
- من حديث الكتب (ثلاثة أجزاء) (الطبعة الثانية)
- أيامي

- الأستاذ عزيز ضياء
- الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
- الأستاذ أحمد قنديل
- الأستاذ أحمد السباعي
- الدكتور إبراهيم عباس نتو
- الأستاذ سعد البواردي
- الأستاذ عبدالله بوقس
- الأستاذ أحمد قنديل
- الأستاذ أمين مدني
- الأستاذ عبدالله بن خميس
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ
- الدكتور عصام خوير
- الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي
- الأستاذ عزيز ضياء
- الشيخ عبدالله عبدالغني خياط
- الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
- الأستاذ أحمد عبدالغفور عطار
- الأستاذ محمد علي مغربي
- الأستاذ عبدالعزيز الرفاعي
- الأستاذ حسين عبدالله سراج
- الأستاذ محمد حسين زيدان
- الأستاذ حامد حسن مطاوع
- الأستاذ محمود عارف
- الدكتور فؤاد عبدالسلام الفارسي
- الأستاذ بدر أحمد كرم
- الدكتور محمود محمد سفر
- الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول
- الأستاذ طاهر زعزعي
- الأستاذ حسين عبدالله سراج
- الأستاذ عمر عبدالجبار
- الشيخ أبو تراب الظاهري
- الشيخ أبو تراب الظاهري
- الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي
- الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
- الدكتور زهير أحمد السباعي
- الأستاذ أحمد السباعي
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ عبدالعزيز مؤمنة
- الأستاذ حسين عبدالله سراج
- الأستاذ محمد سعيد العامودي
- الأستاذ أحمد السباعي



- التعليم في المملكة العربية السعودية (الطبعة الثانية)
- أحاديث وقضايا إنسانية
- البعث (مجموعة قصصية)
- شجرة ظلماء (ديوان شعر)
- الإسلام في نظر أعلام الغرب (الطبعة الثانية)
- حتى لا ن فقد الذاكرة
- مدارسنا والتربية (الطبعة الثالثة)
- وحي الصحراء (الطبعة الثانية)

- الأستاذ عبد الوهاب عبد الواسع
- الدكتور عبد الرحمن بن حسن النفيسة
- الأستاذ محمد علي مغربي
- الدكتور أسامة عبد الرحمن
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ سعد البواردي
- الأستاذ عبد الوهاب عبد الواسع
- الأستاذ عبدالله بلخير

- الأستاذ محمد سعيد عبدالمقصود خوجه
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلال
- الأستاذ عز يز ضياء
- الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ
- الدكتور عصام خوير
- الأستاذ محمد بن أحمد العقيلي
- الشيخ أبو عبد الرحمن بن عقيل الظاهري
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلال
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلال
- الدكتور عبدالله حسين باسلامة
- الأستاذ محمد سعيد العامودي
- الدكتور غازي عبد الرحمن القصيبي

- طيور الأبايل (ديوان شعر) (الطبعة الثانية)
- قصص من تاغور (ترجمة)
- التنظيم القضائي في المملكة العربية السعودية
- زوجتي وأنا (قصة طويلة)
- معجم اللهجة المحلية في منطقة جازان
- لن تلحد
- عمر بن أبي ربيعة
- رجالات الحجاز (ترجم)
- حكاية جيلين
- من أوزاعي
- في رأي المتواضع

## نعت الطبع :

- ماما زبيدة (مجموعة قصصية)
- ديوان حسين عرب
- لا رق في القرآن
- من مقالات عبدالله عبد الجبار
- الإسلام في معترك الفكر
- البرق والبريد والهاتف وصلتها بالحب
- والأشواق والعواطف

- عام ١٩٨٤ لجورج أودويل (قصة مترجمة)
- وجيز النقد عند العرب
- هكذا علمني ورد زورث
- الطاقة نظرة شاملة
- العالم إلى أين والعرب إلى أين ؟
- محمد سعيد عبدالمقصود خوجه (حياته وآثاره)
- التنمية قضية

- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)

- قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا
- غداً أنسى (قصة طويلة)
- تاريخ عمارة المسجد الحرام
- خالتي كدرجان (مجموعة قصصية)
- الحضارة نحد
- الجبل الذي صار سهلاً

- الأستاذ عز يز ضياء
- الأستاذ حسين عرب
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلال
- الأستاذ عبدالله عبد الجبار
- الشيخ سعيد عبد العزيز الجندول
- الأستاذ عبد الرحمن المعمر
- الأستاذ عز يز ضياء
- الأستاذ عبدالله عبد الوهاب العباسي
- الشيخ أبو عبد الرحمن بن عقيل الظاهري
- الدكتور عبد الهادي طاهر
- الدكتور بهاء بن حسين عزي
- الدكتور محمد بن سعد بن حسين
- الدكتور محمود محمد سفر
- الدكتور سليمان بن محمد الغنام
- الدكتور أمل محمد شطا
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ أحمد السباعي
- الدكتور محمود محمد سفر
- الأستاذ أحمد قنديل

# سلسلة : الكتاب الجامعي

## صدر منها :

- الإدارة : دراسة تحليلية للوظائف والقرارات الإدارية
- الجراحة المتقدمة في سرطان الرأس والعنق (باللغة الإنجليزية)
- التومن الطفولة إلى المراهقة
- الحضارة الإسلامية في صقلية وجنوب إيطاليا
- النفط العربي وصناعة تكريره
- الملامح الجغرافية لدروب الحجيج
- علاقة الآباء بالأبناء (دراسة فقهية)
- مبادئ القانون لرجال الأعمال
- الاتجاهات العددية والتنوعية للدوريات السعودية
- قراءات في مشكلات الطفولة
- شعراء التروبادور (ترجمة)
- الفكر التربوي في رعاية الموهوبين
- النظرية النسبية
- أمراض الأذن والأنف والحنجرة (باللغة الإنجليزية)
- المدخل في دراسة الأدب
- الرعاية التربوية للمكفوفين
- أعضاء على نظام الأسرة في الإسلام
- الوحدات النقدية المملوكية
- الأدب المقارن (دراسة في العلاقة بين الأدب العربي والآداب الأوروبية)
- هندسة النظام الكوني في القرآن الكريم
- التجربة الأكاديمية لجامعة البترول والمعادن
- مبادئ الطرق الإحصائية

## تحت الطبع :

- المنظمات الاقتصادية الدولية
- الاقتصاد الإداري
- التعلم الصفي
- الاقتصاد الصناعي
- مبادئ الأحصاء
- دراسات في الإعراب
- الدكتور محمد بن عبد القادر علاقي
- الدكتور فؤاد زهران
- الدكتور عدنان جمجوم
- الدكتور محمد عيد
- الدكتور محمد جميل منصور
- الدكتور فاروق سيد عبدالسلام
- الدكتور عبدالمنعم رسلان
- الدكتور أحمد رمضان شقلية
- الأستاذ سيد عبدالمجيد بكر
- الدكتور سعاد ابراهيم صالح
- الدكتور محمد ابراهيم أبو العينين
- الأستاذ هاشم عبده هاشم
- الدكتور محمد جميل منصور
- الدكتور مريم البغدادي
- الدكتور لطفي بركات أحمد
- الدكتور عبدالرحمن فكري
- الدكتور محمد عبدالمهدي كامل
- الدكتور أمين عبدالله سراج
- الدكتور سراج مصطفى زقروق
- الدكتور مريم البغدادي
- الدكتور لطفي بركات أحمد
- الدكتور سعاد ابراهيم صالح
- الدكتور سامح عبدالرحمن فهمي
- الدكتور عبدالوهاب علي الحكمي
- الدكتور عبدالعليم عبدالرحمن خضر
- الدكتور خضير سعود الخضير
- الدكتور جلال الصياد
- الدكتور عبدالحميد محمد ربيع
- الدكتور حسين عمر
- الدكتور فرج عزت
- الدكتور محمد ز ياد حدان
- الدكتور سليم كامل درويش
- الدكتور جلال الصياد
- الأستاذ عادل سمرة
- الدكتور عبدالهادي الفضلي

## سلسلة :

# رسائل جامعية

## صدر منها :

- صناعة النقل البحري والتنمية
- في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
- الخراسانيون ودورهم السياسي في العصر العباسي الأول
- الملك عبدالعزيز ومؤتمر الكوث
- العثمانيون والإمام القاسم بن علي في اليمن
- القصة في أدب الجاحظ
- تاريخ عمارة الحرم المكي الشريف
- النظرية التربوية الإسلامية
- نظام الحسبة في العراق.. حتى عصر المأمون
- المقصد العلي في زوائد أبي يعلى الموصلي (تحقيق ودراسة)
- الجانب التطبيقي في التربية الإسلامية
- الدولة العثمانية وغربي الجزيرة العربية
- دراسة ناقدة لأساليب التربية المعاصرة في ضوء الإسلام
- الحياة الاجتماعية والاقتصادية في المدينة المنورة في صدر الإسلام
- دراسة انثوغرافية لمنطقة الاحساء (باللغة الانجليزية)
- عادات وتقاليذ الزواج بالمنطقة العربية
- من المملكة العربية السعودية (دراسة ميدانية انثروبولوجية حديثة)
- افتراءات فيليب حتي وكارل بروكلمان على التاريخ الإسلامي
- دور المياه الجوفية في مشروعات الري والصرف بمنطقة الأحساء
- بالمملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
- تقوم النمو الجسماني والنشوء
- الدكتور بهاء حسين عزبي
- الأستاذة ثريا حافظ عرفة
- الأستاذة موضي بنت منصور بن
- عبدالعزيز آل سعود
- الأستاذة أميرة علي المداح
- الأستاذ عبدالله باقازي
- الأستاذة فوزية حسين مطر
- الأستاذة آمال حزة المرزوقي
- الأستاذ رشاد عباس معنوق
- الدكتور نايف بن هاشم الدعيس
- الأستاذة ليلى عبدالرشيد عطار
- الأستاذ نبيل عبدالحلي رضوان
- الأستاذة فتحية عمر حلواني
- الأستاذة نورة بنت عبد الملك آل الشيخ
- الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- الأستاذ أحمد عبدالاله عبدالجبار
- الأستاذ عبدالكريم علي باز
- الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- الدكتورة ظلال محمود رضا

## تحت الطبع :

- الطلب على الإسكان من حيث الاستهلاك والاستثمار
- العقوبات التفرؤية وأهدافها في ضوء الكتاب والسنة
- العقوبات المقدرة وحكمة تشريعها في ضوء الكتاب والسنة
- تطور الكتابات والنقوش في الحجاز منذ فجر الإسلام وحتى منتصف القرن الثالث عشر
- التصنيع والتحضّر في مدينة جدة
- الدكتور فاروق صالح الخطيب
- الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- الأستاذ محمد فهد عبدالله الفهر
- الدكتورة عواطف فيصل بياربي

## صدر منها :

- حارس الفندق القديم (مجموعة قصصية)
- دراسة نقدية لفكر زكي مبارك (باللغة الانجليزية)
- التخلف الإملائي
- ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودية
- ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودية (باللغة الانجليزية) إعداد إدارة النشر بتهامة
- تسالي (من الشعر الشعبي) (الطبعة الثانية) الدكتور حسن يوسف نصيف
- كتاب مجلة الأحكام الشرعية على مذهب الإمام أحمد بن حنبل الشيباني
- النفس الإنسانية في القرآن الكريم
- واقع التعلم في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية) (الطبعة الثانية)
- صحة العائلة في بلد عربي متطور (باللغة الإنجليزية)
- مساء يوم في آذار (مجموعة قصصية)
- النيش في جرح قديم (مجموعة قصصية)
- الرياضة عند العرب في الجاهلية وصدر الإسلام
- الاستراتيجية النفطية ودول الأوبك
- الدليل الأبجدي في شرح نظام العمل السعودي
- رعب على ضفاف بحيرة جنيف
- العقل لا يكفي (مجموعة قصصية)
- أيام مبعثرة (مجموعة قصصية)
- مواسم الشمس المقلبة (مجموعة قصصية)
- ماذا تعرف عن الأمراض ؟
- جهاز الكلية الصناعية
- القرآن وبناء الإنسان
- اعترافات أدبائنا في سيرهم الذاتية
- الطب النفسي معناه وأبعاده
- الزمن الذي مضى (مجموعة قصصية)
- مجموعة الخضراء (دواوين شعر)
- خطوط وكلمات (رسوم كاريكاتورية) (الطبعة الثانية)
- ديوان السلطاني
- الامكانيات النووية للعرب وإسرائيل
- رحلة الربيع
- وللخوف عيون (مجموعة قصصية)
- البحث عن بداية (مجموعة قصصية)
- الوحدة الموضوعية في سورة يوسف
- الأستاذ صالح إبراهيم
- الدكتور محمود الشهابي
- الأستاذة نوال عبد المنعم قاضي
- إعداد إدارة النشر بتهامة
- (باللغة الانجليزية) إعداد إدارة النشر بتهامة
- (الطبعة الثانية)
- الشيخ أحمد بن عبدالله القاري
- الدكتور عبد الوهاب إبراهيم أبوسليمان
- الدكتور محمد إبراهيم أحمد علي
- الأستاذ إبراهيم سرسيق
- الدكتور عبد الله محمد الزيد
- الدكتور زهير أحمد السباعي
- الأستاذ محمد منصور الشقحاء
- الأستاذ السيد عبدالرؤف
- الدكتور محمد أمين ساعاتي
- الأستاذ أحمد محمد طاشكندي
- الدكتور عاطف فخري
- الأستاذ شكيب الأموي
- الأستاذ محمد علي الشيخ
- الأستاذ فؤاد عفاوي
- الأستاذ محمد علي قدس
- الدكتور اسماعيل الهلباوي
- الدكتور عبد الوهاب عبد الرحمن مظهر
- الأستاذ صلاح البكري
- الأستاذ علي عبده بركات
- الدكتور محمد محمد خليل
- الأستاذ صالح إبراهيم
- الأستاذ طاهر زحشري
- الأستاذ علي الخرجي
- الأستاذ محمد بن أحمد العقيلي
- الدكتور صدقة يحيى مستعجل
- الأستاذ فؤاد شاكر
- الأستاذ أحمد شريف الرفاعي
- الأستاذ جواد صيداوي
- الدكتور حسن محمد باجودة

• المجتونة اسمها زهرة عباد الشمس (ديوان شعر)

• من فكرة لفكرة (الجزء الأول)

• رحلات وذكريات

• ذكريات لا تنسى

• تاريخ طب الأطفال عند العرب

• مشكلات بنات

• دراسة في نظام التخطيط (في المملكة العربية السعودية)

• نفحات من طيبة (ديوان شعر)

• الأسر القرشية .. أعيان مكة المحمية

• الماء ومسيرة التنمية (في المملكة العربية السعودية)

## نحت الطبع :

• إليكم شباب الأمة

• سرايا الإسلام

• قراءات في التربية وعلم النفس

• الحجاز واليمن في العصر الأبوي

• ملامح وأفكار

• المذاهب الأدبية في شعر الجنوب

• النظرية الخلقية عند ابن تيمية

• الكشف الجامع لمجلة المنهل

• ديوان حمام

• رحلة الأندلس

• فجر الأندلس

• قریش والاسلام

• الدفاع عن الثقافة

• الشعر المعاصر على ضوء النقد الحديث

• مشكلات لغوية

• دليل مكة السياحي

• من فكرة لفكرة (الجزء الثاني)

• مسائل شخصية

• في بيتك طبيب

• مجموعة فاروق جويده (دواوين شعر)

• السبتيون وسد مأرب

• البسمات

• من كوبنهاجن إلى صنعاء (ترجمة)

• البناء الفني للقصيدة العربية

• نسب الشريف الرضي : الحجازيات وقصائد آخر

• الزكاة في الميزان

• مجموعة النيل (دواوين شعر)

الأستاذة منى غزال

الأستاذ مصطفى أمين

الأستاذ عبدالله حمد الحقييل

الأستاذ محمد المجذوب

الدكتور محمود الحاج قاسم

الأستاذ أحمد شريف الرفاعي

الأستاذ يوسف إبراهيم السلوم

الأستاذ علي حافظ

الأستاذ أبو هشام عبدالله عباس بن صديق

الأستاذ مصطفى نوري عثمان

الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول

الشيخ أبو تراب الظاهري

الأستاذ فخري حسين عزّي

الدكتور لطفي بركات أحمد

الدكتور جميل حرب محمود حسين

الأستاذ أحمد شريف الرفاعي

الدكتور علي علي مصطفى صبح

الدكتور محمد عبدالله عفيفي

الأستاذ عبدالله سالم القحطاني

الأستاذ محمد مصطفى حمام

الدكتور حسين مؤنس

الدكتور حسين مؤنس

الدكتور حسين مؤنس

الدكتور عبدالعزيز شرف

الأستاذ علي مصطفى عبداللطيف السحرتي

الدكتور شوقي النجار

اعداد تهامة للنشر والمكتبات

الأستاذ مصطفى أمين

الأستاذ مصطفى أمين

الدكتور محمد عبدالله القصيمي

الأستاذ فاروق جويده

الأستاذ محمود جلال

الدكتور حسن نصيف

الأستاذ محمد أحمد الرعدي

الدكتور عبدالمعزم خفاجي

الدكتورة عاتكة الخرزجي

الدكتور محمد السعيد وهبة

الأستاذ عبدالعزيز محمد رشيد مجوم

الأستاذ طاهر زعشمري

# كتاب للأطفال

## صدر منها :

ينقلها إلى العربية الأستاذ عزيز ضياء

مجموعة : حكايات للأطفال

- الكؤوس الفضية الاثنتا عشر
- سرحانة وعلبة الكبريت
- الجنيات تخرج من علب الهدايا
- السيارة السحرية
- كيف يستخدم الملح في صيد الطيور
- سعاد لا تعرف الساعة
- الحصان الذي فقد ذيله
- تورنة الفراولة
- ضيوف نار الزينة
- الضفدع العجوز والعنكبوت

## تحت الطبع

- سوسن وظلها
- الهدية التي قدمها سمير
- أبو الحسن الصغير الذي كان جائعا
- الأم ياسمينه واللص
- الأرنب الطائر
- معظم النار من مستصغر الشرر
- لبنى والفراشة
- ساطور حمدان
- وأدوا الأمانات إلى أهلها

للأستاذ يعقوب محمد اسحاق

مجموعة : لكل حيوان قصة

- الفرد
- الكلب
- السلحفاة
- الأسد
- الحمار الأهلي
- الفرس
- الغزال
- الوعل
- الضب
- الغراب
- الجمل
- البغل
- الفراشة
- الدجاج
- الحمار الوحشي
- الجاموس
- الثعلب
- الأرنب
- الذئب
- الفأر
- الخروف
- البط
- البيغاء
- الحمامة
- البوم
- البجع
- الهدهد
- الكنغر
- الخفاش
- النعام
- فرس النهر
- التمساح
- الضفدع
- الدب
- الخرتيت

إعداد : الأستاذ يعقوب محمد اسحاق

مجموعة : حكايات كليله ودمنه

- أسد غررت به أرنب
- المكاء التي خدعت السمكات
- عندما أصبح القرد نخارا
- الغراب يهزم العبان

## تحت الطبع

- سمكة ضيعها الكسل
- قاض يحرق شجرة كاذبة
- لقد صدق الجمل
- الكلمة التي قتلت صاحبها

- قصص متنوعة :

- # کتاب الناشئ

صدر منہا :

- مجموعة: حكايات ألف ليلة وليلة

- إعداد

- عقبہ بن نافع

**Books Published in English by Tihama**

- Surgery of Advanced Cancer of Head and Neck.  
By: F.M. Zahran  
A.M.R. Jamjoom  
M.D.EED
- Zaki Mubarak: A Critical Study.  
By Dr. Mahmud Al Shihabi
- Summary of Saudi Arabian  
Third Five Year Development Plan
- Education in Saudi Arabia, A Model with Difference Second Edition  
By Dr. Abdulla Mohamed A Zaid
- The Health of the Family in A Changing Arabia  
By Dr. Zohair A. Sebai
- Diseases of Ear, Nose and Throat  
By: Dr. Amin A. Siraj  
Dr. Siraj A. Zakzouk
- Shipping and Development in Saudi Arabia  
By: Dr. Baha Bin Hussein Azzee
- Tihama Economic Directory.
- Riyadh Citiguide.
- Banking and Investment in Saudi Arabia.
- A Guide to Hotels in Saudi Arabia.
- Who,s Who in Saudi Arabia.
- An Ethnographic Study of Al-Hasa Region of Eastern Saudi Arabia  
By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib
- The Role Of Groundwater In The Irrigation And Drainage Of  
The Al Hasa Of Eastern Saudi Arabia  
By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib